NILES

TRIGONOMETRÍA PLANA

SEGUNDA EDICIÓN

LIMUSA NORIEGA

TRIGONOMETRÍA PLANA

ciones
trigonométricas

Nathan O. Niles

NORIEGA LIMUSA

Advertencia preliminar

Como es bien sabido, casi no hay libro de matemáticas sin errores tipográficos y éste no es la excepción: por mencionar algunos ejemplos, las gráficas de las páginas 42 ó 46 (2.2.1 y 2.3.2) están colocadas por encima de donde deben ir, de modo que al trazarlas en el cuaderno hay que ponerlas bien y no como vienen en el libro; en el ejercicio h) de la pág 52 se lee:

"$\cos^2 \frac{\pi}{4}\left(1+\tan^2 \frac{4}{\pi}\right)=1$" y lo correcto debiese ser

"$\cos^2 \frac{\pi}{4}\left(1+\tan^2 \frac{\pi}{4}\right)=1$" y muchos más detalles que el lector inteligente sabrá distinguir.

Considerando el uso de las tablas obsoleto pues ya la calculadora científica es de gran empleo, se han omitido y las respuestas del final del libro pueden tener cierta variación en la precisión decimal

Si bien el enfoque del libro es anticuado, pues ya casi nadie resuelve triángulos logarítmicamente, por ejemplo, el contenido de un libro como éste sigue siendo indispensable en muchas áreas técnicas y no técnicas.

TRIGONOMETRIA PLANA

SEGUNDA EDICION

NATHAN O. NILES

Profesor Adjunto del
Departamento de Matemáticas
de la Academia Naval de los Estados Unidos
Annapolis, Maryland

NORIEGA EDITORES

EDITORIAL LIMUSA

MÉXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

Prólogo al estudiante

La trigonometría no es una materia difícil; es lógica y su estudio exige un trabajo concienzudo. Al estudiar matemáticas, la teoría y los ejemplos deben leerse con todo cuidado antes de intentar la resolución de los problemas. En los libros de matemáticas, las fórmulas y los símbolos deben leerse como si estuvieran expresados en palabras. Después de todo son simplemente símbolos empleados para expresar ciertas ideas. Así, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, se debe leer "c es igual a la raíz cuadrada de a cuadrada más b cuadrada". Los ejemplos deben resolverse en una hoja aparte hasta alcanzar la certidumbre de haber comprendido cada uno de los pasos que conducen a la solución y conviene analizarlos cuidadosamente puesto que se incluyeron pensando en el propio beneficio del estudiante. Se requiere ser cuidadoso y no utilizar el signo $=$ como si fuera un simple signo de puntuación. Las matemáticas son como un juego que se desarrolla dentro de ciertas reglas, y si se juega dentro de ellas, se gana. En cambio, su violación siempre será castigada.

Una pregunta que suelen hacer los estudiantes es: ¿dónde se usa lo que estamos estudiando? La trigonometría se aplica en diversas materias. Algunas de ellas son la topografía, la astronomía, la navegación, el análisis armónico, la electrónica y muchas ramas de la ingeniería. A medida que el estudiante alcance madurez matemática, encontrará otros temas en dónde aplicarla.

Les deseo mucho éxito, en el estudio de la trigonometría.

NATHAN O. NILES

Prólogo de la primera edición

El presente libro ha sido escrito con el deseo de exponer la trigonometría con un carácter más moderno. La actual tendencia se dirige más hacia los aspectos analíticos de la materia que hacia la parte operacional. Introduciendo el concepto de función en términos de dominios y recorridos, se destaca ante el estudiante el hecho de que las funciones trigonométricas pueden calcularse tanto para un ángulo como para un número real. De esta manera, la transición del concepto de funciones trigonométricas de ángulos al de funciones trigonométricas de números reales aparece como una diferencia basada en el significado de la variable independiente. En consecuencia, los aspectos analíticos de la trigonometría se estudian tanto para números reales como para ángulos.

Por razones pedagógicas se estudia primero el concepto de funciones trigonométricas de ángulos seguido de un capítulo sobre aplicaciones al triángulo rectángulo. Luego, en el capítulo 4, se presenta el concepto de funciones trigonométricas de números reales. A partir de este capítulo, el estudiante tendrá una idea clara de las ecuaciones del tipo $x = \cos 8t$, en donde $8t$ es un número real, que le será de gran utilidad en sus futuros estudios.

Con objeto de ahorrar tiempo en la ejecución de operaciones numéricas, se presenta la resolución de triángulos utilizando una regla de cálculo en la cual las escalas S y T están sobre la regleta y la escala D sobre la regla misma. (En los ejemplos se empleó una regla decitrig.) Sin embargo, puede usarse el método tradicional de resolución logarítmica sin pérdida de con-

tinuidad en la exposición. Para abreviar más aún el tiempo empleado en operaciones numéricas, la resolución de triángulos oblicuángulos se ha hecho utilizando la ley de los senos y la de los cosenos. Para quienes deseen aplicar la ley de las tangentes y las fórmulas de los ángulos mitad, encontrarán los métodos respectivos en el apéndice del libro.

Se incluyen otras novedades. Desde un principio se introduce el radián como unidad angular y se usa constantemente. Con frecuencia el estudiante desea saber cómo se calculan los valores de las funciones trigonométricas; una de las ventajas de emplear el radián para medir un ángulo está en que permite calcular las funciones trigonométricas mediante el empleo de series infinitas. En el texto se da un ejemplo de ello. En el capítulo sobre identidades, el último artículo se dedica a la eliminación trigonométrica de parámetros; en ese mismo capítulo, algunos problemas incluyen tipos de sustituciones trigonométricas como las que se usan en integración. Las fórmulas de adición de las funciones trigonométricas están basadas en la distancia entre dos puntos y en el círculo de radio igual a la unidad (círculo trigonométrico o círculo unitario). El último capítulo incluye un estudio sobre el producto escalar y el producto alterno de dos vectores coplanares.

Las definiciones empleadas concuerdan con las dadas en los libros de texto de cursos más elevados. Los problemas son suficientes en número, de manera que el estudiante pueda adquirir una buena práctica; y las demostraciones, aun cuando se presentan con todo rigor, se dan en un lenguaje accesible al estudiante.

El libro está ordenado de manera que satisfaga las necesidades de diferentes cursos de trigonometría en cuanto a su duración. Un curso breve puede comprender los capítulos 1, 2, 3, 4, 5 y la primera parte del 6, 7, 8 y 9.

Dada la abundancia de libros de trigonometría plana, resulta imposible revisar cada uno de ellos a fin de evitar cualquier repetición en las demostraciones o en los problemas. Por otra parte deseo expresar mi gratitud a todos los autores de los libros que he usado en mis clases o que he leído en los últimos años. Uno de los que me fue de gran utilidad para el tema de funciones trigonométricas de los números reales, es el titulado *Principles of Mathematics* de Allendorfer y Oakley, publicado por McGraw-Hill Book Company en 1955. En caso de que inconscientemente haya empleado algún material que el autor considere como original, de antemano ofrezco mis excusas y mi pleno reconocimiento a su obra.

Deseo expresar mi agradecimiento al profesor S. S. Saslaw, coautor del libro *Plane and Spherical Trigonometry,* publicado por el Instituto Náutico de los Estados Unidos, en 1948, por su lectura crítica del manuscrito de este libro. Igualmente a los profesores J. P. Hoyt y T. W. Moore por

sus críticas y sugerencias, y a J. R. Gorman y A. K. Karwath por su espléndida ayuda en la mejor presentación del texto. Por último, a todos mis colegas cuyas discusiones me proporcionaron diferentes ideas sobre problemas y métodos de presentación, mis más calurosas gracias.

NATHAN O. NILES

Prólogo a la segunda edición

Algunos de los temas tratados en la primera edición, se han revisado cuidadosamente en esta nueva para darle mayor fluidez a las ideas. Particularmente, la descripción de funciones es más rigurosa y se amplía la definición de una función en términos de conjuntos.

Para aquellos estudiantes no familiarizados con los conjuntos, se agregó al apéndice, una sección relativa a los mismos.

El capítulo de vectores y números complejos se revisó, a fin de utilizar más los vectores para examinar los números complejos. Se aumentó una sección sobre ecuaciones logarítmicas y exponenciales, al capítulo relativo a logaritmos.

El cambio principal respecto a la primera edición estriba en los problemas, ya que casi todos los problemas numéricos se cambiaron y añadiéronse otros más difíciles y de Teoría. Al final de cada capítulo hay un grupo de problemas de repaso, que se pueden utilizar como examen a juicio del profesor.

Agradezco al Profesor Adjunto A. K. Karwath su espléndida ayuda en la formulación de los nuevos problemas y comprobación de las respuestas.

NATHAN O. NILES

Contenido

CAPITULO 1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES **19**

1–1. Introducción. 1–2. Rectas dirigidas. 1–3. Sistema de coordenadas rectangulares. 1–4. Generación de ángulos positivos y negativos. 1–5. Radián. 1–6. Posición normal de un ángulo. 1–7. Funciones.

CAPITULO 2 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (ANGULOS) **37**

2–1. Definición de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo. 2–2. Signos de las funciones trigonométricas. 2–3. Dada una función trigonométrica hallar todas las demás. 2–4. Valores exactos de las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°. 2–5. Funciones trigonométricas de múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ de ángulos cuadrantales. 2–6. Funciones trigonométricas de ángulos agudos positivos. 2–7. Valores de las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera. 2–8. Funciones trigonométricas de $(-\theta)$.

CAPITULO 3 EL TRIANGULO RECTANGULO **63**

3–1. Introducción. 3–2. Funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo. 3–3. Cifras significativas. 3–4–A. Solución aritmética de triángulos rectángulos. 3–4–B. Solución de un triángulo rectángulo utilizando la regla de cálculo. 3–5. Aplicaciones elementales.

CAPITULO 4 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (NUMEROS REALES) 83

4–1. Introducción. 4–2. El círculo unitario o círculo trigonométrico. 4–3. Funciones trigonométricas de números reales. 4–4. Números reales y ángulos dirigidos. 4–5. Valores de las funciones trigonométricas de cualquier número real.

CAPITULO 5 IDENTIDADES FUNDAMENTALES 99

5–1. Introducción. 5–2. Ocho identidades fundamentales. 5–3. Identidades elementales. 5–4. Eliminación trigonométrica de parámetros.

CAPITULO 6 VARIACIONES Y GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS 111

6–1. Variación de sen Θ y cos Θ. 6–2. Gráfica de $y = \text{sen } x$. 6–3. Gráfica de $y = a \text{ sen } (bx + \alpha)$. 6–4. Gráfica de $y = \cos x$. 6–5. Variación de tan Θ. 6–6. Gráficas de tan x, cot x, sec x y csc x.

CAPITULO 7 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS (ARGUMENTOS COMPUESTOS) 127

7–1. Introducción. 7–2. Coseno de la diferencia y de la suma de dos ángulos. 7–3. Fórmulas de adición para las funciones seno y tangente. 7–4. Funciones trigonométricas del argumento doble. 7–5. Funciones trigonométricas del semiargumento. 7–6. Fórmulas de transformación de sumas a productos, y viceversa. 7–7. Resumen. 7–8. Miscelánea de identidades.

CAPITULO 8 LOGARITMOS 147

8–1. Logaritmos. 8–2. Tablas de logaritmos. 8–3. Operaciones con logaritmos. 8–4. Resolución logarítmica de triángulos rectángulos. 8–5. Cambio de base. Ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

CAPITULO 9 TRIANGULOS OBLICUANGULOS 161

9–1. Introducción. 9–2. Ley de los senos. 9–3. Aplicaciones de la ley de los senos. 9–4. Ley de

los cosenos. 9–5. Aplicaciones de la ley de los cosenos.

CAPITULO 10 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS **181**

10–1. Funciones inversas. 10–2. Funciones trigonométricas inversas. 10–3. Relaciones entre funciones trigonométricas inversas. 10–4. Gráficas de las funciones trigonométricas inversas.

CAPITULO 11 ECUACIONES TRIGONOMETRICAS **191**

11–1. Introducción. 11–2. Ecuaciones que se resuelven mediante operaciones algebraicas simples. 11–3. Ecuaciones que se resuelven mediante reducciones trigonométricas. 11–4. Ecuaciones de la forma a sen $\Theta + b \cos \Theta = c$.

CAPITULO 12 VECTORES Y NUMEROS COMPLEJOS **199**

12–1. Vectores. 12–2. Números complejos. 12–3. Forma polar de los números complejos. 12–4. Multiplicación, división y potencias enteras de números complejos. 12–5. Raíces de números complejos.

APENDICE **221**

A–1. El mílit. A–2. Ley de las tangentes. A–3. Tangente de ángulos mitad. A–4. Conjuntos.

TABLAS **231**

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS **253**

INDICE **267**

Trigonometría pura (sin uso del Plano Cartesiano): Capítulos 3 y 9
Trigonometría analítica (emplea el Plano Cartesiano): Capítulos 2, 4, 6 y 12
Trigonometría algebraica: Caps. 5, 7 y 11.

CAPITULO 1

Conceptos fundamentales

1.1. INTRODUCCION

En un principio la trigonometría se empleó para resolver problemas de astronomía y de agrimensura. La palabra trigonometría significa, atendiendo a las dos palabras griegas que la forman, medida de los triángulos. Con el desarrollo de las matemáticas y de la ciencia moderna, el panorama de la trigonometría se ha ampliado hasta llegar a ser un instrumento indispensable en el análisis matemático, en las ciencias físicas y en varias ramas de la ingeniería.

Muchos de los lectores han estudiado las definiciones de las funciones trigonométricas referidas a un ángulo. Lo habrán hecho, seguramente, en libros de geometría plana o de álgebra en los que se estudian las funciones seno y coseno de un ángulo. Esto es lo corriente, y es sumamente útil para la solución numérica de problemas sobre triángulos y otros análogos. Sin embargo, en cursos de matemáticas superiores, y en materias que les sean afines, el concepto de las funciones trigonométricas de los números reales[1] adquiere una gran importancia. Estudiaremos primero las funciones trigonométricas de ángulos, las cuales se emplearán en la resolución de triángulos rectángulos y luego, en el capítulo 4, las funciones trigonométricas de números reales.

Siempre que se inicia el estudio de una materia, se requiere aprender ciertas definiciones fundamentales; una vez establecidas, se puede proceder a buscar el modo de trabajar con ellas.

En el capítulo siguiente veremos cómo pueden obtenerse los valores de las funciones trigonométricas, cómo se emplean y cuál es su comportamiento algebraico, pero primero es necesario saber algo acerca de segmentos dirigidos, sistemas de coordenadas rectangulares y ángulos.

1.2. RECTAS DIRIGIDAS

Una recta dirigida es aquella a la cual se asignan un sentido positivo y uno negativo. En la figura 1.2-1, considere que el sentido positivo de la recta l es hacia la derecha del punto O (tal como se indica con la flecha), y que el sentido positivo es hacia la izquierda de O. La distancia (o longitud del segmento de recta) entre dos puntos cualesquiera A y B, está dada por la medida de la separación entre los dos puntos. La **distancia dirigida** *del* punto A *al* punto B indica, tanto la longitud del segmento de recta como el sentido *de* A a B. El símbolo usado para designar la *distancia dirigida* **de** A **a** B es $\boldsymbol{AB}$.

Teorema 1.2-1: *Para dos puntos cualesquiera A y B situados sobre una recta dirigida*

Figura 1.2-1

[1] En este libro se considerarán "números reales" a los números con los que usualmente se trabaja. La palabra "real" los distingue de otro conjunto llamado "números complejos". En consecuencia, cuando en este libro se hable de números y salvo que se especifique lo contrario, quedará implícito que se trata de números reales.

(1.2-1) $$\boldsymbol{AB = -BA.}$$

Así, en la figura 1.2-1, si $AB = -5$, entonces $BA = 5$.

El *valor absoluto* de un número N se representa por el símbolo $|N|$. Si N es positiva, $|N| = N$. Si N es negativa, $|N| = -N$. Para $N = 0$, $|0| = 0$. O sea, $|3| = 3$ y $|-3| = -(-3) = 3$.

La distancia *entre* dos puntos cualesquiera A y B, situados sobre una recta dirigida, es $|AB|$.

La posición de cualquier punto P situado sobre una recta l, está dada por un número que representa la distancia dirigida, OP, medida con una unidad adecuada, a partir de un punto O llamado origen; este número recibe el nombre de *coordenada de P*. Si en la recta l (figura 1.2-1) la distancia entre cada marca es una unidad, la coordenada del punto A es 2 y la de B es -3. Cada número real puede ser considerado como la coordenada de uno, y solamente un punto situado sobre una recta dirigida. Existe entonces una correspondencia biunívoca entre los números reales y las coordenadas de los puntos de una recta dirigida. Es decir, a cada número real le corresponde un solo punto de la recta, y a cada punto de la recta le corresponde un solo número real.

Teorema 1.2-2: *Si A, B y C son tres puntos cualesquiera de una* recta dirigida, entonces

(1.2-2) $$\boldsymbol{AC = AB + BC}$$

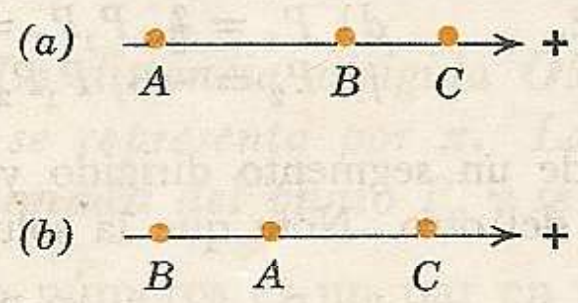


Figura 1.2-2

Demostración: Con el arreglo indicado en la figura 1.2-2(a), el teorema es evidente; con el de la figura 1.2-2(b), se tiene

$$BA + AC = BC.$$

Por tanto,

$$AC = -BA + BC.$$

pero

$$-BA = AB,$$

luego

$$AC = AB + BC.$$

Como ejercicio se deja al estudiante la demostración para otros arreglos posibles.

EJERCICIOS 1.2

En los ejercicios del 1 al 4, muestre que $AC = AB + BC$, en donde A, B y C son tres puntos cualesquiera de una recta dirigida.

En los problemas del 5 al 7, demuestre que la distancia dirigida de un punto P_1 a un punto P_2 está dada por $NP_2 - NP_1$.

8. Considere que los tres puntos A, B y C están sobre una recta dirigida; calcule el segmento que se pide.

a) $AB = 5$, $BC = 2$, halle AC. *b)* $AB = -3$, $BC = 4$, calcule AC.
c) $AC = 3$, $AB = 5$, halle BC. *d)* $CA = -5$, $BC = -2$, calcule AB.

9. Dadas las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 sobre una recta, halle la distancia de P_1 a P_2 y la distancia entre P_1 y P_2.

a) $P_1 = 5$, $P_2 = -3$. *b)* $P_1 = 3$, $P_2 = 7$.
c) $P_1 = -7$, $P_2 = -5$. *d)* $P_1 = 5$, $P_2 = -5$.

10. Dado un segmento dirigido y la coordenada de un extremo, halle la coordenada del otro.

a) $P_1 = 3$, $P_1P_2 = -7$. *b)* $P_1 = -10$, $P_1P_2 = -3$.
c) $P_1 = 0.3$, $P_1P_2 = 5.2$. *d)* $P_1 = \frac{2}{3}$, $P_1P_2 = -6$.
e) $P_2 = 2$, $P_1P_2 = -3$. *f)* $P_2 = -3$, $P_1P_2 = 7$.

11. Dada la longitud de un segmento dirigido y la coordenada de un extremo, halle la coordenada del otro. Note que la solución no es única.

a) $P_1 = 5$, $|P_1P_2| = 3$. *b)* $P_1 = -7$, $|P_1P_2| = 7$.
c) $P_1 = 0$, $|P_1P_2| = 2$. *d)* $P_1 = -\frac{1}{2}$, $|P_1P_2| = 0$.
e) $P_2 = -3$, $|P_1P_2| = 5$. *f)* $P_2 = 4$, $|P_1P_2| = 10$.

12. Los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 están en línea recta. Halle la coordenada de P_4 si la coordenada de $P_1 = -3$, $P_1P_3 = -2$, $P_3P_2 = -1$ y $P_2P_4 = 5$.

13. ¿Sería única la solución del problema anterior si el único cambio en el enunciado es $|P_2P_4| = 5$?

14. *a)* Dadas las coordenadas de $P_1 = 2$ y de $P_3 = 10$, halle P_2 tal que $P_1P_2 = \frac{1}{3}P_2P_3$.

b) Dados $P_3 = 7$ y $P_2 = -3$, halle P_1 tal que $P_1P_2 = 5\ P_2P_3$.

1.3. SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES

En el artículo precedente se vio que los números reales pueden ser empleados para localizar un punto en una recta; se construyó así un sistema coordenado sobre ella. De manera semejante se puede ahora construir un sistema de coordenadas con el fin de localizar un punto en un plano.

Sean dos rectas dirigidas, perpendiculares entre sí, situadas en el plano, que se cortan en el punto O (figura 1.3-1). Una de las rectas se designa

como eje X y la otra como eje Y. El eje X es usualmente horizontal con su sentido *positivo* hacia la *derecha*; el eje Y se traza entonces verticalmente con su sentido *positivo* hacia *arriba*. Los ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes; numerados I, II, III y IV; el cuadrante I se va a representar por CI, y análogamente los demás. Establezca ahora un sistema coordenado en cada eje tomando O como origen.

Sea P un punto cualquiera del plano; por P trace una perpendicular al eje Y, y sea N el punto de intersección; trace también una perpendicular al eje X, y sea M el punto de intersección.

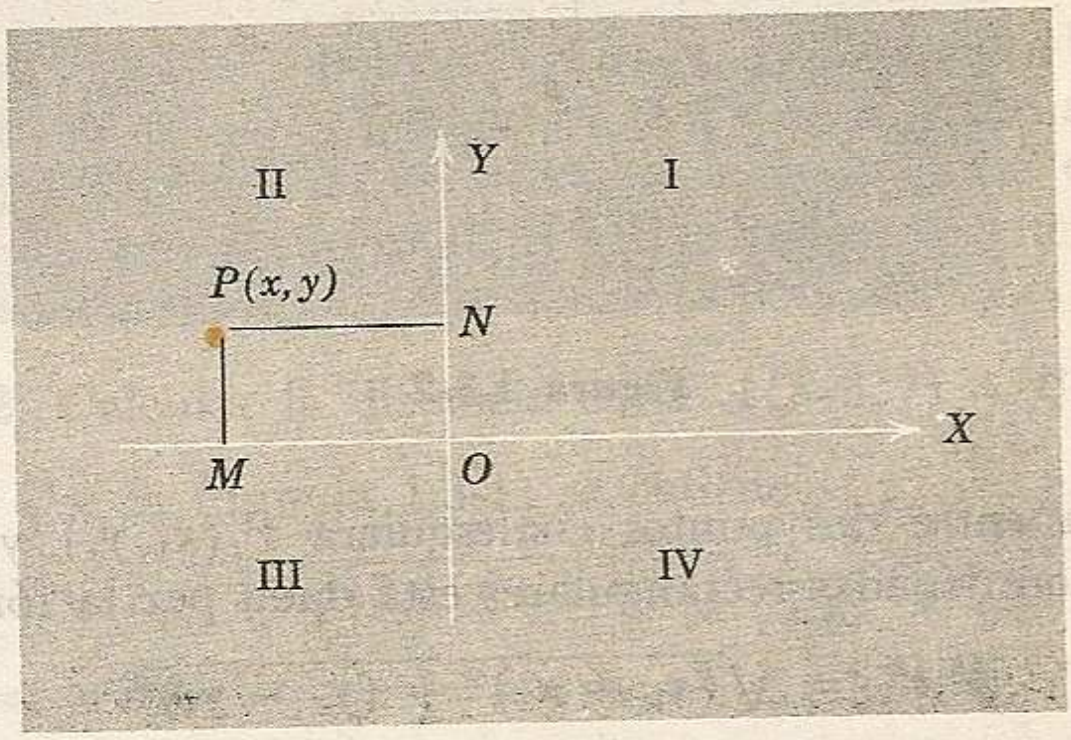


Figura 1.3-1

Definición 1.3-1: *La distancia dirigida* **OM** *es la* ***coordenada x*** *o* ***abscisa*** *del punto P, y se representa por* **x.** *La distancia dirigida* **ON** *es la* ***coordenada y*** *u* ***ordenada*** *del punto P, y se representa por* **y.**

Un par ordenado de números es un par en el cual el orden es importante. Así, el par ordenado $(-3, 7)$ no es igual que el par ordenado $(7, -3)$; x y y reciben el nombre de coordenadas rectangulares del punto P y se escriben como el par ordenado (x, y). De esta manera; se puede ahora asignar a cada punto del plano un par ordenado de números reales y a cada par ordenado de números reales, le corresponde solamente un punto del plano. Existe así una correspondencia biunívoca entre un punto y sus coordenadas rectangulares. El símbolo empleado para representar que *cualquier* punto P tiene por coordenadas x y y, es $P(x, y)$.

Las coordenadas de un punto pueden ser negativas, puesto que en la definición de coordenadas rectangulares se hizo uso del concepto de distancias dirigidas.

Ejemplo 1. Localice los puntos $A(3, 4)$, $B(-2, 5)$, $C(-1, -3)$, y $D(4, -2)$.

Solución: Trace dos rectas dirigidas, perpendiculares entre sí y marque sobre ellas unidades de tamaño adecuado. Vea la figura 1.3-2.

Para el punto A, la abscisa es igual a 3 unidades y la ordenada a 4 unidades. Márquelas y localice así A. Para el punto B la abscisa es igual a -2 unidades y la ordenada es 5 unidades.

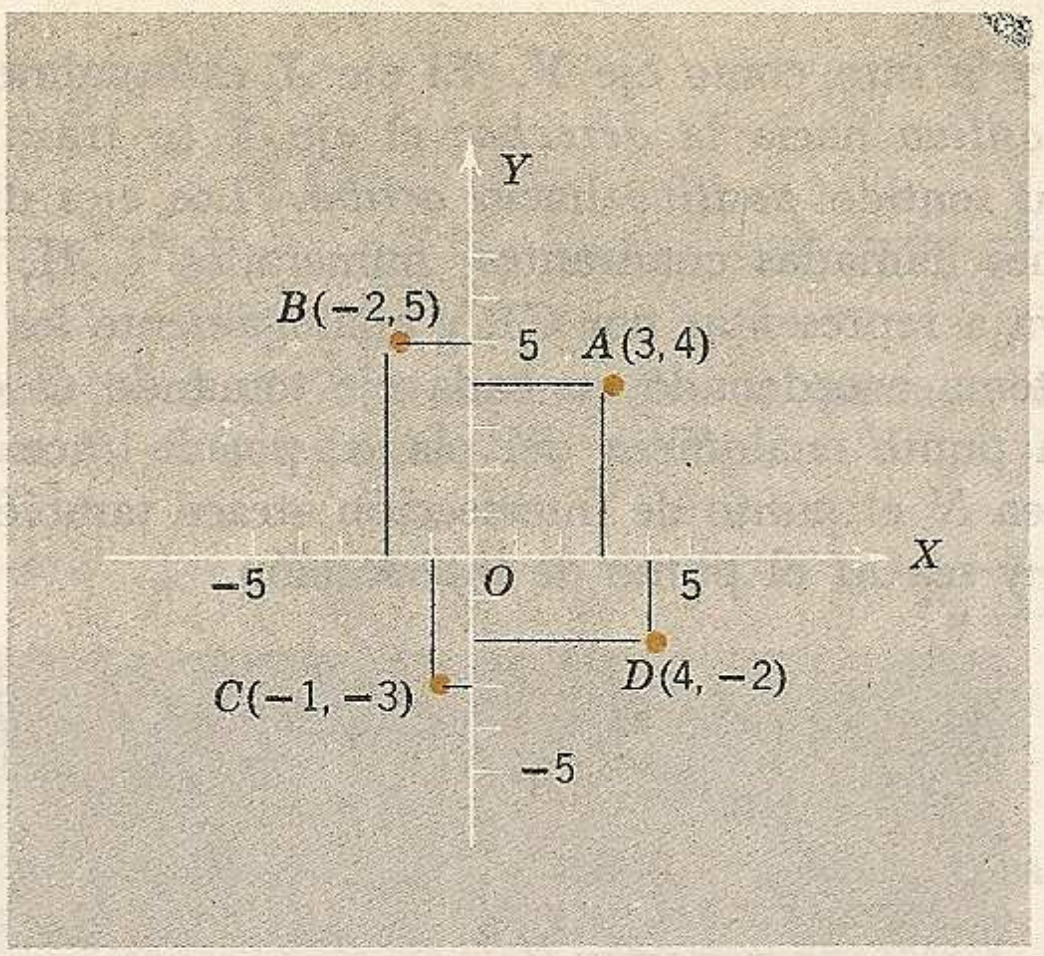


Figura 1.3-2

La distancia entre dos puntos cualesquiera $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en un sistema de coordenadas rectangulares está dada por la fórmula

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.^2 \tag{1.3-1}$$

Demostración: Construya el triángulo rectángulo P_1CP_2 con el segmento P_1P_2 como hipotenusa (figura 1.3-3). El lado paralelo al eje X es el segmento P_1C, y el paralelo al eje Y es el segmento CP_2.

Del teorema de Pitágoras, se tiene

$$(P_1P_2)^2 = (P_1C)^2 + (CP_2)^2.$$

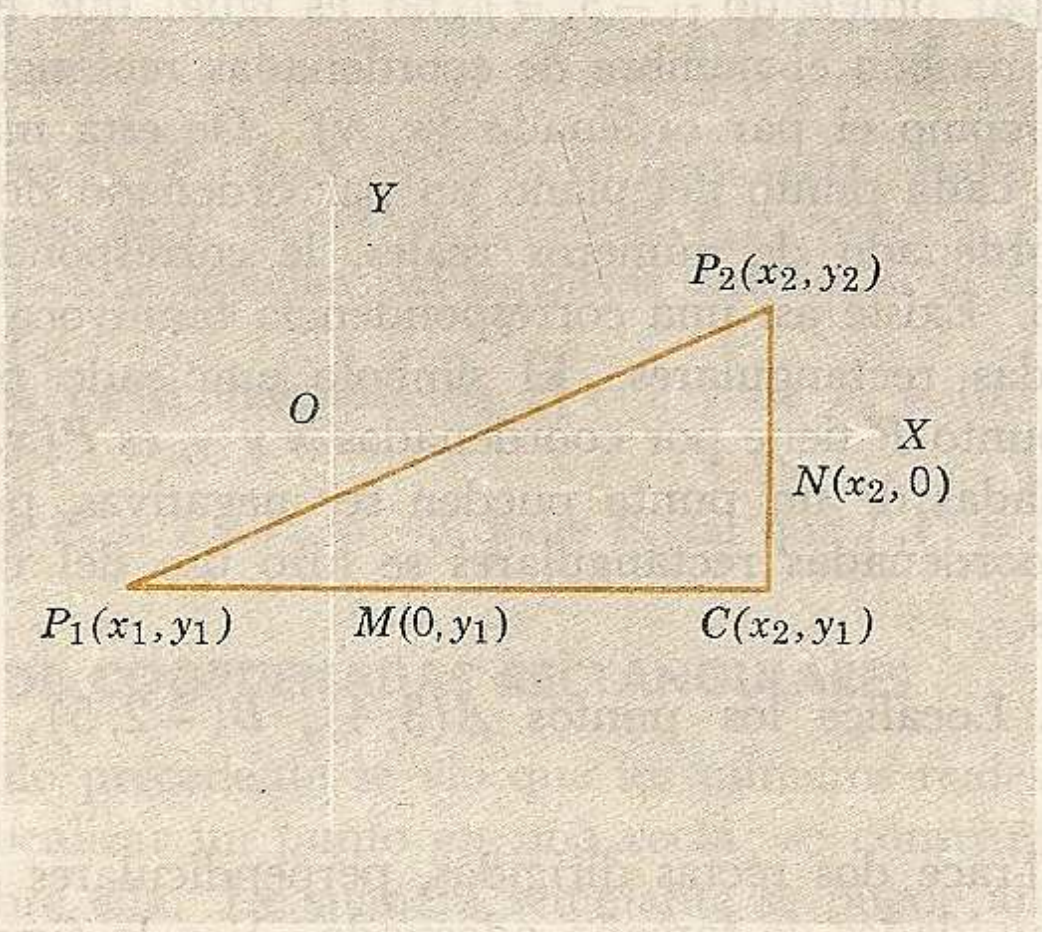


Figura 1.3-3

[2] El símbolo $\sqrt{\ }$ indica la raíz cuadrada *no negativa*.

Use ahora la ecuación 1.2-2; se tiene

$$P_1C = P_1M + MC$$

Por definición de abscisa; $MC = x_2$ y $MP_1 = x_1$; por tanto, $P_1M = -x_1$. Entonces, $P_1C = -x_1 + x_2$, ó $P_1C = x_2 - x_1$. Análogamente, usando la definición de ordenada, se encuentra

$$CP_2 = CN + NP_2 = -y_1 + y_2, \text{ ó } CP_2 = y_2 - y_1.$$

Luego,

$$|\boldsymbol{P_1P_2}| = \sqrt{(\boldsymbol{x_2 - x_1})^2 + (\boldsymbol{y_2 - y_1})^2}.$$

Como $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$, no importa qué punto se escoge como P_1 o como P_2. La demostración anterior se basa en la ecuación 1.2-2, la cual es válida para tres puntos cualesquiera de una recta; por lo tanto, la fórmula es válida independientemente de la situación de los dos puntos.

Ejemplo 2. Calcular la distancia entre $A(-3, 7)$ y $B(2, -1)$.

Solución: Use la fórmula 1.3-1; se obtiene

$$|P_AP_B| = \sqrt{[2 - (-3)^2 + (-1 - 7)]^2} = \sqrt{(5)^2 + (-8)^2},$$

$$|\boldsymbol{P_AP_B}| = \sqrt{\boldsymbol{89}}.$$

El segmento dirigido que va **del** origen **al** punto $P(x, y)$ se llama *vector de posición* de P.[3] Su *magnitud,* llamada también *radio vector* de P, se representa por $\boldsymbol{r}$, y es siempre positiva; su valor está dado por la fórmula

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{1.3-2}$$

La demostración se deja al estudiante como ejercicio.

EJERCICIOS 1.3

1. Indique los signos algebraicos de las coordenadas de un punto situado en el

a) CI. *b)* CII. *c)* CIII. *d)* CIV.

2. Demuestre la ecuación 1.3-2, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Los pares ordenados dados, son iguales; halle x y y en cada caso:

a) $(3, 4) = (x, 4)$. *b)* $(-3, -5) = (x, y)$.

4. Diga cuáles de los siguientes pares ordenados, son iguales

a) $(2, -3)$. *b)* $(2, -2)$. *c)* $(2, 3)$.
d) $(2, -3)$. *e)* $(-2, -3)$. *f)* $(4, 6)$.

5. Trace los puntos siguientes y junto a cada punto escriba sus coordenadas. Indique cuál es el valor de la abscisa, de la ordenada y del radio vector y anote el cuadrante en el que está cada punto.

[3] Vea ejercicios 12.1-20.

a) $(3, 4)$. *b)* $(-5, 12)$. *c)* $(-8, 6)$. *d)* $(-15, -8)$.
e) $(-4, -3)$. *f)* $(-7, -24)$. *g)* $(1, 2)$. *h)* $(1.2, -0.5)$.

6. Halle la coordenada que falta o el radio vector del punto P.

a) $(-7, 24)$. *b)* $(4, -3)$. *c)* $(2, y)$, $r = \sqrt{13}$, P en CIV.
d) $(x, 6)$, $r = 10$, P en CII.
e) $(1, y)$, $r = 5\sqrt{2}$. *f)* $(x, -3)$, $r = 3\sqrt{2}$.

7. Calcule la distancia entre los puntos dados:

a) $(3,2)$, $(7, 7)$. *b)* $(2, 3)$, $(-1, -1)$.
c) $(0, -2)$, $(-4, -3)$. *d)* $(-2, -1)$, $(5, 23)$.
e) $(2, -5)$, $(6, 3)$. *f)* $(-3, 1)$, $(-1, 10)$.

8. Dados P_1 y $|P_1P_2|$, halle x ó y de P_2.

a) $P_1(2, 1)$, $|P_1P_2| = 5$, $P_2(x, 5)$.
b) $P_1(-3, -2)$, $|P_1P_2| = 13$, $P_2(9, y)$.

9. Dados $P_1(1, 1)$ y $|P_1P_2| = 5$, halle una ecuación que relacione x con y de $P_2(x, y)$. Describa el conjunto de puntos P_2 que satisface dicha ecuación.

10. Demuestre que la distancia d_h entre dos puntos cualesquiera de una recta horizontal, está dada por el valor absoluto de la diferencia de sus abscisas.

11. Demuestre que la distancia d_v entre dos puntos cualesquiera de una recta vertical, está dada por el valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.

12. Demuestre que la fórmula de la distancia, 1.3-1, en los siguientes casos: *a)* P_1 en el segundo cuadrante y P_2 en el primero; *b)* P_1 en el cuarto cuadrante y P_2 en el tercero.

13. Muestre que el triángulo con vértices en $(-2, 7)$, $(-3, 5)$ y $(13, -3)$, es un triángulo rectángulo.

14. Halle el perímetro de un triángulo con vértices en $(2, -1)$, $(-3, -1)$ y $(12, 13)$.

15. Dados $P_1(-2, 0)$ y $P_2(8, 0)$, halle x tal que P_1, P_2 y $P_3(x, 3)$ formen un triángulo rectángulo con el ángulo recto en P_3.

16. Dados $P_1(-5, 0)$ y $P_2(5, 0)$ halle una ecuación que relacione x y y de $P(x, y)$ tal que $|P_1P_2| + |PP_2| = 10$.

1.4. GENERACION DE ANGULOS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Semirrecta es la parte de la recta que queda de un solo lado de un punto fijo situado sobre ella, llamado extremo. En trigonometría es usual considerar que un ángulo es generado por una semirrecta que gira alrededor de su extremo.

Definición 1.4-1: *Un ángulo es la figura engendrada por la rotación de una semirrecta alrededor de su extremo, desde una posición inicial hasta una posición terminal. La amplitud de la rotación es la medida del ángulo.*

La posición inicial se llama **lado inicial;** la posición final se llama **lado terminal** y el extremo de la semirrecta se llama **vértice** del ángulo. Cuando se hable de un ángulo, se va a significar la medida del ángulo.

En la figura 1.4-1, los ángulos 1, 2 y 3 representan algunos de la infinidad de ángulos que tienen la misma posición inicial y terminal que el ángulo AOB. Si la rotación del lado terminal es en *sentido levógiro,* el ángulo se considera *positivo*; si la rotación del lado terminal es en *sentido dextrógiro,* el ángulo se considera *negativo*. El sentido de la rotación se indica mediante una flecha sobre una línea curva. Un *ángulo dirigido*, es aquel al cual se ha asignado un sentido.

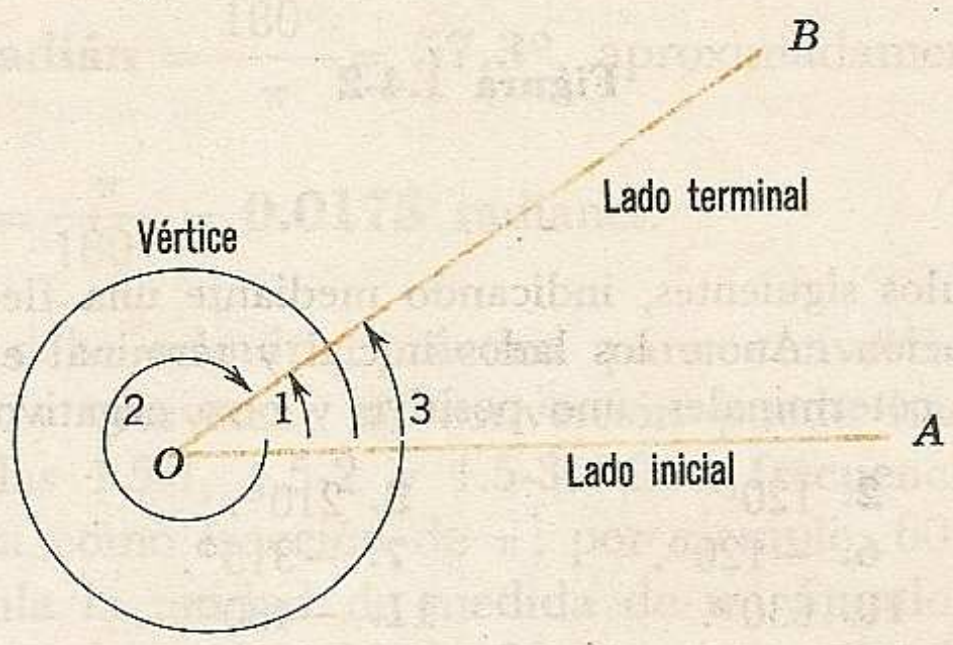


Figura 1.4-1

La medida de un ángulo puede ser hecha en grados, radianes o mílits.[4] *Un grado* es la magnitud de un ángulo cuyo vértice está en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan un arco de longitud igual a 1/360 de la circunferencia. Un ángulo de un grado puede ser dividido en 60 partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de *minuto*; cada minuto puede a su vez ser subdividido en 60 partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de *segundo*. Los símbolos familiares, °, ′, ″, sirven para designar *grados*, *minutos* y *segundos*, respectivamente. El radián se definirá en el artículo 1.5.

No hay límite para la magnitud de un ángulo. Si una semirrecta efectúa una revolución completa en sentido levógiro, habrá generado *un ángulo* de 360°. Dos revoluciones completas en el mismo sentido generarán *un ángulo* de 720°; así, las semirrectas OA y OB pueden servir como lados inicial y terminal de muchos ángulos.

Definición 1.4-2: *Los ángulos que tienen los mismos lados inicial y terminal, se llaman ángulos* ***coterminales.***

Los ángulos se designan frecuentemente por medio de letras griegas tales como α (alfa), β (beta), γ (gamma), θ (theta), ϕ (phi).

Ejemplo. Trace ángulos θ de 30°, $-45°$ y 390°; designe por ϕ un ángulo coterminal del ángulo θ.

Solución: Vea la figura 1.4-2.

[4] El concepto de mílit puede verse en el apéndice.

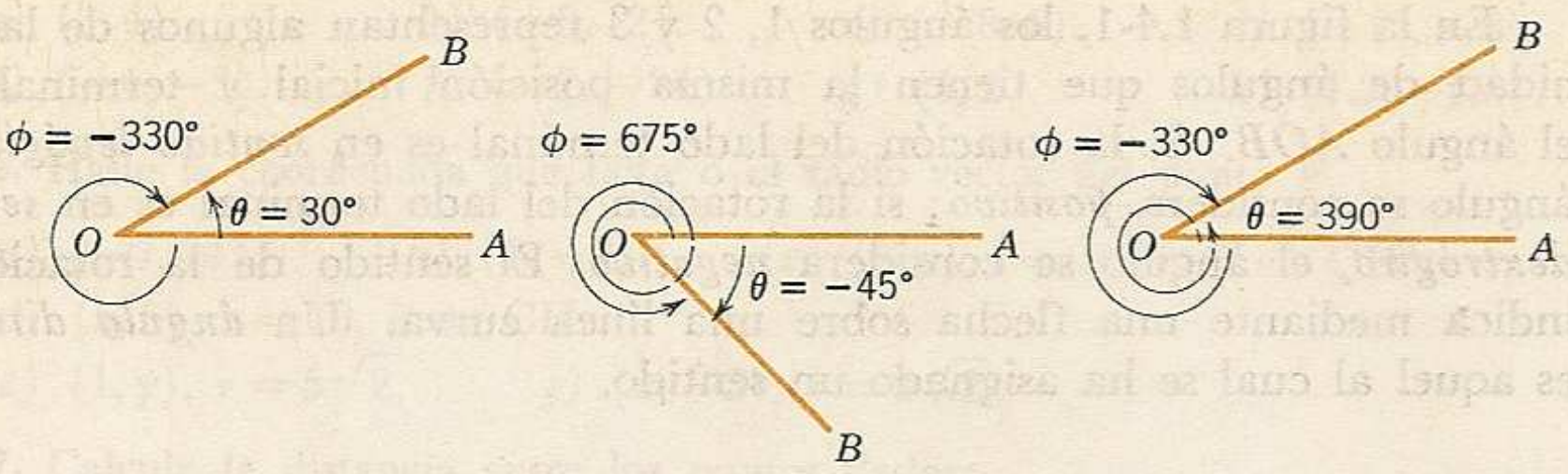


Figura 1.4-2

EJERCICIOS 1.4

Dibuje los ángulos siguientes, indicando mediante una flecha el sentido y la amplitud de la rotación. Anote los lados inicial y terminal e indique para cada ángulo dos ángulos coterminales, uno positivo y otro negativo.

1. 45°.	**2.** 120°.	**3.** 210°.	**4.** 330°.
5. −60°.	**6.** −120°.	**7.** −315°.	**8.** −300°.
9. 390°.	**10.** 630°.	**11.** −480°.	**12.** −1000°
13. 225°.	**14.** −90°.	**15.** −330°.	**16.** −180°.
17. 15°.	**18.** 75°.	**19.** −225°.	**20.** 0°.

1.5. RADIAN

Definición 1.5-1: *Un radián es la medida de un ángulo con vértice en el centro de un círculo y cuyos lados interceptan un arco de circunferencia de longitud igual al radio.*

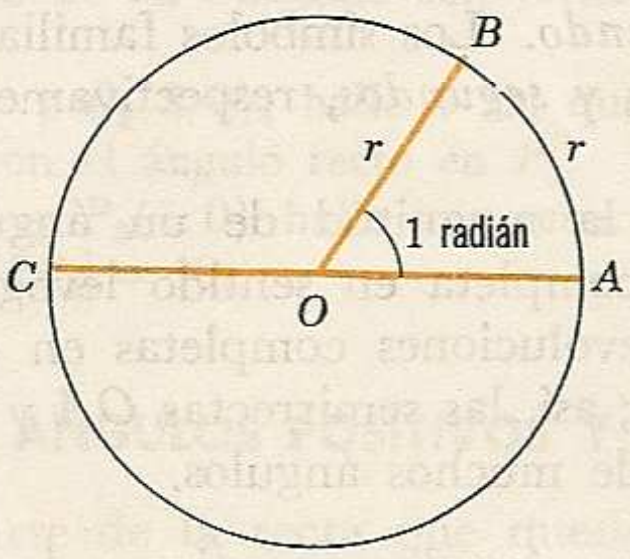


Figura 1.5-1

Relación entre grados y *radianes*: en geometría se demuestra que los ángulos en el centro son proporcionales a los arcos que interceptan. De la figura 1.5-1, se tiene

$$\frac{\measuredangle AOC}{\measuredangle AOB} = \frac{\overset{\frown}{ABC}}{\overset{\frown}{AB}}.$$

$\measuredangle AOC = 180°$, $\measuredangle AOB = 1$ radián, y ABC es una semicircunferencia cuya longitud es πr. Se tiene así

$$\frac{180°}{1 \text{ radián}} = \frac{\pi r}{r}, \quad \therefore$$

(1.5-1) $$\pi \textbf{ radianes} = \textbf{180°}.$$

En las operaciones aritméticas del texto se usará 3.14 como valor aproximado de π.[5]

Usando $\pi = 3.14$ se tiene

(1.5-2) $$\textbf{1 radián} = \frac{180°}{\pi} = \textbf{57.3°}, \text{ aproximadamente}^{6} \text{ y}$$

(1.5-3) $$\textbf{1°} = \frac{\pi}{180°} = \textbf{0.0175} \text{ radianes.}$$

El estudiante debe adquirir práctica para convertir rápidamente de grados a radianes y viceversa; tal conversión puede hacerse mediante el uso de las fórmulas 1.5-1, 1.5-2 y 1.5-3. Con frecuencia, un ángulo en radianes se expresa como fracción de π; por ejemplo, $60° = \pi/3$ radianes.

Si no se estipula la unidad de medida de un ángulo, se sobreentiende que es el radián. Así, un ángulo de 30 es un ángulo de 30 radianes, en tanto que un ángulo de 30°, es uno de 30 grados.

Ejemplo 1: Exprese en radianes los siguientes ángulos:

a) 30°. *b)* 25°.

Solución: *a)* Como $30° = \frac{1}{6}(180°)$, por 1.5-1, se tiene

$$\textbf{30°} = \frac{\pi}{6} \textbf{ radianes.}$$

b) De 1.5-2, 1 radián = 57.3°; consecuentemente, 1.3 radianes = (1.3)

Ejemplo 2. Exprese en grados los siguientes ángulos:

a) $\frac{2}{3}\pi$. *b)* 1.3.

Solución: *a)* Como por 1.5-1

$$\pi \text{ radianes} = \textbf{180°},$$
$$\tfrac{2}{3}\pi = \tfrac{2}{3}(180°) = \textbf{120°}.$$

b) De 1.5-2, 1 radián = 57.3°; consecuentemente, 1.3 radianes = (1.3) (57.3°) = **74.5°**.

La conversión de grados a radianes y de radianes a grados se facilita mediante el uso de proporciones y de la regla de cálculo.

Ejemplo 3. Use la regla de cálculo para convertir 4.6 radianes a grados.

[5] El valor de π se ha calculado con muchas cifras decimales. Con 10 cifras decimales, $\pi = 3.1415926536$. Si en un problema dado se desea mayor exactitud, se emplean valores más aproximados de π.

[6] El signo de igualdad se usa por conveniencia, para aproximaciones.

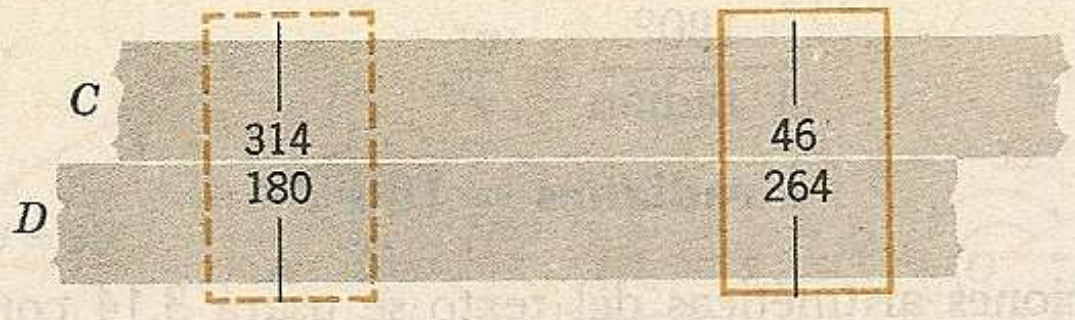


Figura 1.5-2

Solución: Establezca la proporción $\frac{\pi}{180°} = \frac{4.6}{x}$, y disponga la regla de cálculo como se muestra en la figura 1.5-2. Se obtiene así **4.6 radianes = 264°.**

Una de las muchas aplicaciones del radián como unidad angular, es el cálculo de longitudes de arco. Sea s (figura 1.5-3) el arco de una circunferencia de radio r, interceptado por un ángulo θ radianes. Por geometría se sabe que en una circunferencia los arcos son proporcionales a sus ángulos centrales; si el ángulo AOB mide un radián, el arco AB tiene longitud r. Entonces podemos establecer la proporción

$$\frac{s}{r} \quad \frac{\theta \text{ radianes}}{1 \text{ radián}},$$

de donde

(1.5-4) $$s = r\theta; \ (\theta \text{ en radianes}).$$

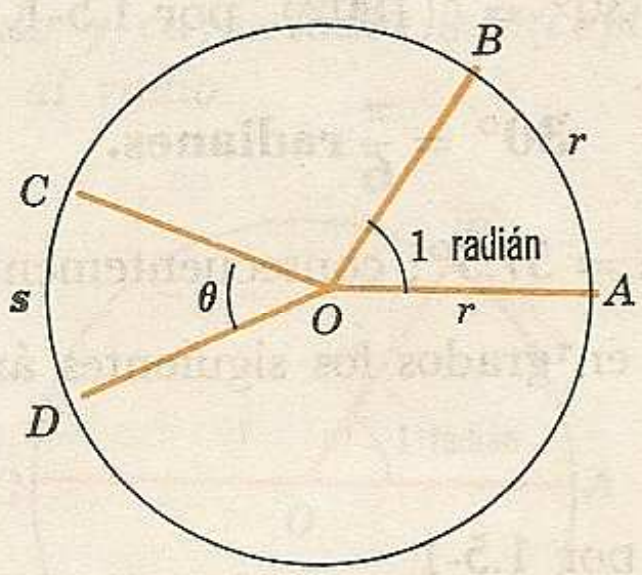


Figura 1.5-3

Ejemplo 4. Halle la longitud de un arco de circunferencia subtendido por un ángulo central de 67°; el radio mide 20 cm.

Solución: Para usar 1.5-4, exprese primero el ángulo en radianes: $67° = 67\ (0.0175) = 1.17$ radianes. Entonces

$$s = (\mathbf{20})(\mathbf{1.17}) = \mathbf{23.4\ cm.}$$

EJERCICIOS 1.5

1. Convierta las medidas dadas de grados a radianes.

a) 180°. *b)* 60°. *c)* 45°. *d)* 240°.
e) $\pi°$. *f)* $4\pi°$. *g)* $\frac{2\pi°}{3}$. *h)* $\frac{\pi°}{2}$.
i) 112.5°. *j)* 200° 10′. *k)* 326°41′. *l)* 425.2°.

2. Convierta las medidas dadas de radianes a grados.

a) π. *b)* $\frac{2\pi}{3}$. *c)* $\frac{15\pi}{90}$. *d)* $\frac{7\pi}{6}$.
e) 0.028. *f)* 2.3. *g)* 30. *h)* 6.12.
i) $\frac{1}{\pi}$. *j)* $\frac{2}{3\pi}$. *k)* $\frac{3}{4\pi}$. *l)* 1.9π.

Para los problemas del 3 al 7, use 1.5-4.

3. Calcule s, si $r = 25$ cm y $\theta = 0.2$.

4. Halle s, si $r = 8$ cm y $\theta = 53°$.

5. Un bote describe una circunferencia alrededor de una boya fija. El ángulo que forman las visuales del bote a la boya desde los extremos de un arco de 1.5 millas, es de 110°. Halle la distancia del bote a la boya.

6. Un péndulo de 2.5 m de longitud, oscila describiendo un arco de 15°20′. Calcule la longitud del arco descrito por su punto medio.

7. Una banda que mueve una polea tiene una longitud de 37 m. Si el diámetro de la polea es de 1.5 m ¿cuántas revoluciones da ésta cuando la banda da una vuelta completa?

8. Muestre que el área de un sector circular de radio r, subtendido por un ángulo central θ, está dada por $A = \frac{1}{2}r^2\theta$, radianes. (*Sugerencia*: Use la figura 1.5-4 y el teorema que dice: en un círculo dado las áreas de dos sectores son proporcionales a sus ángulos centrales. El sector $ABCOA$ está subtendido por un ángulo central de π radianes; halle el área del sector AOB.)

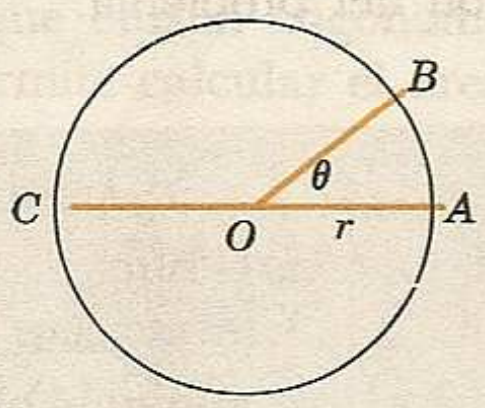


Figura 1.5-4

Para los problemas del 9 al 14 use la fórmula del problema 8.

9. Halle A, si $r = 7.2$ cm, $\theta = 2.3$.

10. Halle r, si $A = 20.3$ m², $\theta = 0.4$.

11. Calcule θ, si $r = 459$ m, $A = 590$ m².

12. Hallar el área de un sector circular de 2 m de radio, subtendido por un ángulo central de 42°.

13. Un faro cuyo alcance es de 1000 m, puede girar un ángulo de 150°. Calcule el área barrida por el haz luminoso.

14. Un sector circular tiene un perímetro de 325 pies y un ángulo central de 120°. Calcule su área.

15. Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra, a una altura de 573 kilómetros. En un cierto intervalo de tiempo, su radio vector (origen

en el centro de la Tierra), genera un ángulo de 100°. ¿Qué distancia recorre en ese intervalo y cuál es el área barrida por el radio vector? Suponga que el radio de la Tierra es de 6376 kilómetros.

16. Calcule la equivalencia en grados de un radián (aproximado hasta minutos) si

a) $\pi = 3.14159$.

b) $\pi = \frac{22}{7}$.

17. Una rueda de bicicleta tiene 66 cm de diámetro. ¿Qué distancia recorre la bicicleta cuando la rueda ha completado 10 revoluciones? Si la bicicleta recorre 160 m ¿cuántas revoluciones ha dado la rueda?

18. Una rueda de 3 m de diámetro gira a razón de 2 r.p.m. ¿Cuántos radianes gira en 5 minutos? ¿Qué distancia recorre un punto de su periferia en el mismo intervalo?

1.6. POSICION NORMAL DE UN ANGULO

Un ángulo está en **posición normal** si su vértice está en el origen y su *lado inicial* coincide con el *lado positivo del eje X*. Si el lado terminal está en el segundo cuadrante, el ángulo se denomina ángulo del segundo cuadrante, y análogamente para los otros cuadrantes. Si el lado terminal coincide con un eje, el ángulo es múltiplo de 90°.

Ejemplo. Trace en posición normal un ángulo cuyo lado terminal pasa por el punto $(-3, -4)$.

Solución: En la figura 1.6-1, θ es un ángulo positivo y ϕ uno negativo, que cumplen la condición del problema.

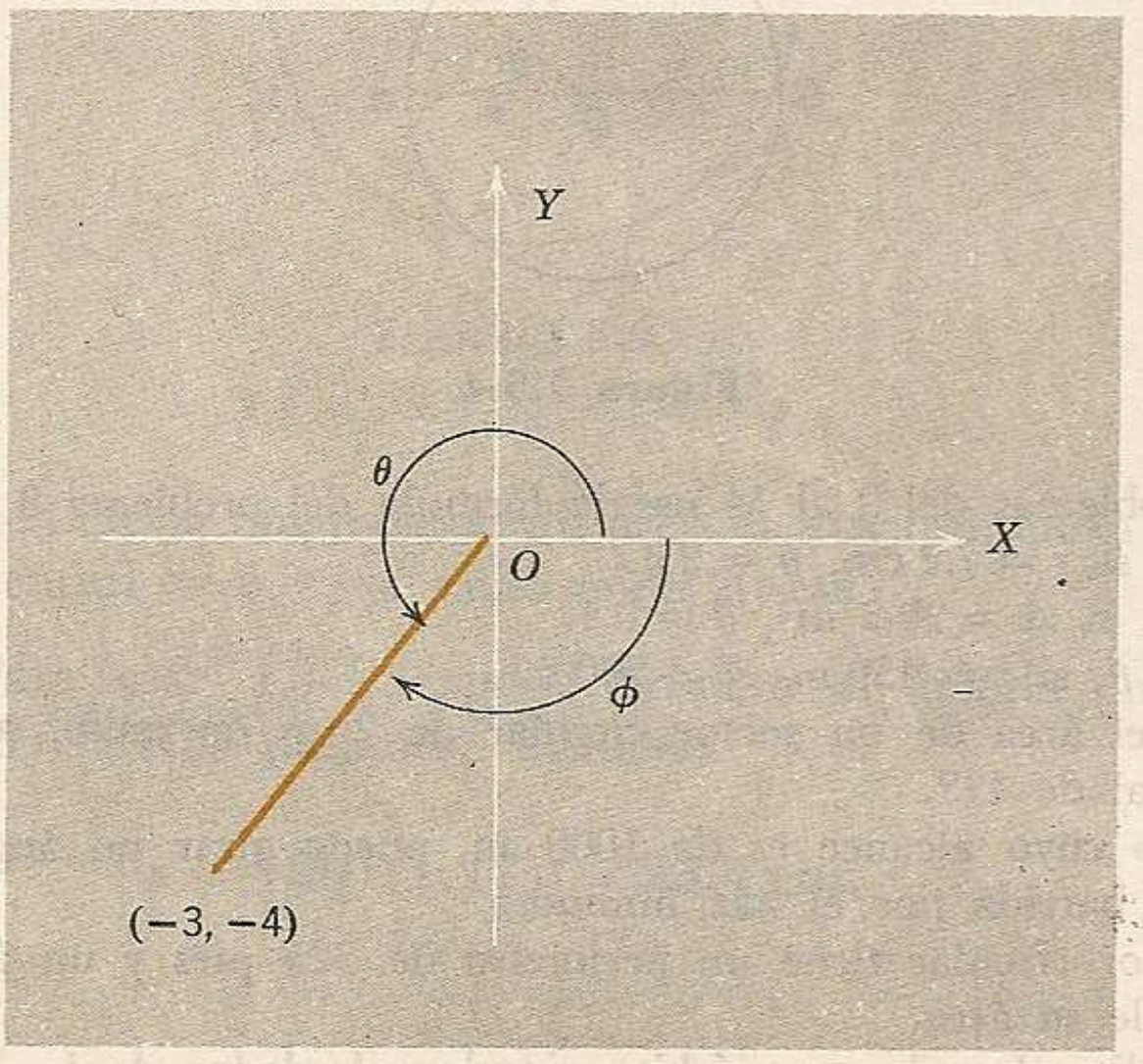


Figura 1.6-1

EJERCICIOS 1.6

Trace, en posición normal, los ángulos cuyos lados terminales pasan por el punto dado. Designe por θ uno de los ángulos positivos y por ϕ uno de los negativos así formados. Indique el cuadrante de cada ángulo.

1. $(3, 4)$. **2.** $(-7, 2)$. **3.** $(0, 3)$.
4. $(-5, 12)$. **5.** $(-2, -5)$. **6.** $(0, 2)$.
7. $(8, -24)$. **8.** $(-2, 0)$. **9.** $(-3, -5)$.
10. $(0, -2)$. **11.** $(-2, -2)$. **12.** $(-4, -1)$.

13. Considere los puntos $A(3, 0)$, $B(7, 0)$ y $C(7, 3)$; ¿está $\measuredangle BAC$ en posición normal? Si la respuesta es negativa, diga cuáles pueden ser las coordenadas de puntos A', B' y C' tales que $\measuredangle B'A'C'$ esté en posición normal y $\measuredangle B'A'C' = \measuredangle BAC$.

14. Halle las coordenadas de los puntos A', B' y C' si $\measuredangle B'C'A'$ está en posición normal y $\measuredangle B'C'A' = \measuredangle BCA$ del problema anterior.

1.7. FUNCIONES

El concepto de *función* es muy importante en matemáticas. En matemáticas elementales, una función establece usualmente una correspondencia entre dos conjuntos de números (vea el artículo A.4 en el apéndice). Existen muchas maneras de establecer esa correspondencia; v.gr.: tablas, gráficas, fórmulas, etc.

El costo del envío de un paquete por correo está determinado por su peso. Un empleado postal puede estimar el precio del envío mediante el uso de una tabla en la que está indicado el costo para cada peso.

Las gráficas se utilizan para relacionar estadísticas como, por ejemplo, el número de estudiantes que cursan trigonometría en determinados años.

La fórmula $A = \pi r^2$ permite calcular el área de un círculo si se conoce el radio.

Note que cada uno de los métodos anteriores establece una correspondencia entre dos conjuntos de números.

Una función consta de tres partes:

1. Un conjunto, llamado *dominio* de la función.
2. Un conjunto asociado, llamado *recorrido* de la función; *cada* elemento de este conjunto es la *imagen* de cuando menos un elemento del dominio; pero no pueden existir *dos* imágenes para *un solo* elemento del dominio.

Todo conjunto que contiene (propia o impropiamente) al recorrido, recibe el nombre de *codominio* o *contradominio* de la función.

3. Una *regla* (o *manera*) para la correspondencia, la cual sirve para asignar a cada elemento del *dominio uno*, y *sólo uno*, del *recorrido*, en las condiciones ya explicadas en la parte 2.

En cursos más avanzados, una función se define, en términos de conjuntos, como sigue:

Definición 1.7-1: *Una función es un conjunto de pares ordenados, tales que para cada primer elemento del par, existe un segundo elemento,*

determinado en forma única. El conjunto de los primeros elementos se llama dominio y el de los segundos, recorrido.

Frecuentemente, y por conveniencia, la regla para la correspondencia se considera como la función, en vez del conjunto de pares ordenados. Esta es la costumbre que se va a seguir en este libro.

Siempre que en un conjunto que contenga más de un elemento, se utilice un símbolo para representar un elemento arbitrario del conjunto, dicho símbolo recibe el nombre de *variable*.

Si el conjunto contiene solamente un elemento, entonces el símbolo recibe el nombre de *constante*. Es usual emplear las letras finales del alfabeto, tales como u, v, x, y, z, para designar las variables; de manera análoga, es usual emplear las letras iniciales del alfabeto para designar las constantes.

Para las funciones se utilizan notaciones especiales. La regla empleada se designa, corrientemente, por f, g, T, *sen*, y otros símbolos. La letra x generalmente representa un elemento arbitrario del dominio de la función y recibe el nombre de *variable independiente*. La letra y se utiliza comúnmente para representar una *imagen* arbitraria y recibe el nombre de *variable dependiente*.

El símbolo $f(x)$ denota la imagen asignada a x por la función f y existen dos maneras de leerlo: "f **en** x" y "f **de** x". El primero es el más adecuado puesto que indica el valor de la función f *en* el número x; sin embargo, comúnmente se lee "f **de** x". De acuerdo con esa costumbre, usaremos "f **de** x" para valores generales de x, en tanto que para valores particulares, por ejemplo $x = a$, $f(a)$ se leerá "f **en** a". La expresión $y = f(x)$ representa también el valor de la función en x. Se acostumbra designar a los símbolos dentro del paréntesis con el nombre de *argumento* de la función; así para $f(x)$ el argumento es x y para $f(y + 3)$ el argumento es $y + 3$.

Para la representación de otras funciones es usual el empleo de otros símbolos, tales como $T(\theta)$, $g(z)$, etc.

El símbolo $f(x)$ tiene un doble significado en matemáticas. Representa tanto a la propia función f, como al valor de la función **para** un valor particular de x; esta ambigüedad no causa, sin embargo, ninguna confusión. Consideremos, por ejemplo, $f(x) = x^2$; entonces, $f(-2)$ representa el valor de la función para $x = -2$, o sea $f(-2) = (-2)^2 = 4$.

Al especificar una función particular, es necesario dar, directa o indirectamente, todas las partes de la función. Sin embargo, en matemáticas elementales, es común que no se mencionen explícitamente el dominio o el recorrido de la función, suponiéndose que son obvios o fáciles de determinar. En este libro, la regla se va a especificar por ecuaciones o fórmulas; así, para $f(x) = x^2$, es obvio que el dominio es el conjunto de los números reales, en tanto que el recorrido es el conjunto de todos los números no negativos, ya que la regla establece que una imagen se obtiene elevando al cuadrado un elemento del dominio. Para $f(x) = \sqrt{x}$, es evidente que el dominio y el recorrido constan de toda $x \geqq 0$ (léase: x mayor o igual a cero).

Cuando se desea restringir el dominio, es necesario estipularlo de manera específica. Suponga que se desea restringir el dominio a los números comprendidos entre 1 y 2, ambos incluidos; se escribiría, por ejemplo, $f(x) = x^2$, $1 \leq x \leq 2$ (léase x mayor o igual a uno y menor o igual a 2).

La trigonometría estudia las propiedades de ciertas magnitudes cuyos valores están determinados por los valores de un ángulo variable, o de un número real. Esto es, existen funciones de la medida del ángulo o de números reales.

EJERCICIOS 1.7

1. Si $f(x) = 5x - 2$, halle $f(1)$, $f(0)$, $f(-3)$.

2. Si $f(u) = \dfrac{u^2 + 3}{u + 1}$, halle $f(2)$, $f(-2)$, $f(a + h)$.

3. Si $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}$, halle $f(2)$, $f(-2)$.

4. Diga cuál es el argumento de las funciones *a)* $f(x)$; *b)* $f(x + 2)$; *c)* $F(z^2)$; *d)* $T(\phi)$; *e)* $\operatorname{sen}(\theta + \phi)$; *f)* $gd(u)$ y *g)* $\operatorname{senh}(t)$.

5. Exprese el radio de un círculo en función de su área.

6. Indique el dominio y el recorrido de cada función y exprese en palabras la regla:

a) $f(x) = 5x^2$; *b)* $f(x) = \dfrac{3}{x + 3}$ (*Sugerencia*: en álgebra no está definida la división entre cero.)

c) $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x - 1}$. *d)* $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. *e)* $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$.

f) $f(x) = |x - 1|$. *g)* $f(x) = 3x - 1$, $-1 \leqq x \leqq 3$.
h) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $-3 \leqq x \leqq 0$.

7. Exprese la abscisa de un punto como función de su ordenada y de su radio vector.

8. Exprese la ordenada de un punto como función de su abscisa y de su radio vector.

9. Exprese el radio vector de un punto como función de su abscisa y de su ordenada.

10. Las funciones se representan a menudo por una ecuación, pero no toda ecuación es una función. Diga cuáles de las siguientes ecuaciones son funciones de x. (*Sugerencia*: despeje y y sustitúyala por $f(x)$.)

a) $x + 3y = 7$. *b)* $x^2 + y + 3 = 0$.
c) $x^2 + y^2 = 9$. *d)* $y^2 - x = 0$.
e) $y = 3$. *f)* $x = 3$.

11. Si $f(x) = x^2 + 3$, muestre que $f(x) = f(-x)$. Cuado esto se cumple, se dice que $f(x)$ es una función *par*.

12. Si $f(x) = x^3 - x$, muestre que $f(x) = -f(-x)$. Cuando esto se cumple, se dice que $f(x)$ es una función *impar*.

13. Sea $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Use los resultados de los dos problemas anteriores para mostrar que *a)* $h(x)$ es par si $f(x)$ y $g(x)$ son ambas pares o impares y *b)* $h(x)$ es impar si uno de los factores es par y el otro impar.

14. Diga si las siguientes ecuaciones representan funciones pares o impares de x o ni una ni otra cosa.

a) $x + y = 0$. *b)* $x^2 + y + 3 = 0$. *c)* $x^2 + y + x = 3$.

15. Cualquier función $f(x)$ puede escribirse $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, como puede comprobarse fácilmente. Consecuentemente, muestre que toda función puede expresarse como la suma de una función par y una impar. (*Sugerencia*: designe por $E(x)$ la expresión del primer paréntesis y por $O(x)$ la del segundo; a continuación haga ver que $E(x)$ es par, etc. (Vea los ejercicios 11 y 12.)

16. Diga cuáles de los siguientes conjuntos son funciones

a) $\{(3, 2), (4, 7)\}$. *b)* $\{(3, 2), (3, 7)\}$.
c) $\{(2, 4), (4, 4)\}$. *d)* $\{(1, 1)\}$.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 1

1. Muestre que $CA = CB + BA$ para tres puntos alineados A, B, C, cualesquiera.

2. Determine la coordenada de P_3 si $P_1 = 5$, $P_2 = 4$ y $P_1P_3 = -3\ P_1P_2$; los tres puntos están alineados.

3. Extienda la noción de pares ordenados (díada) a ternas ordenadas (tríadas) y a continuación defina la igualdad de éstas.

4. Determine $P_3(x, y)$ si forma con $P_1(0, 0)$ y $P_2(2, 0)$, un triángulo equilátero.

5. Diga qué pares de ángulos son coterminales:

a) 45°, 405°. *b)* −45°, 270°. *c)* 120, −240°.
d) 210°, 935°.

6. Obtenga una fórmula para el área de un sector circular ¿qué restricción resulta para el ángulo en el centro?

7. Halle la longitud del arco recorrido por el pedal de una bicicleta con rueda de 66 cm, cuando ésta recorre una distancia de 3.00 m. El pedal se mueve en una circunferencia de 25 cm de diámetro y da 10 revoluciones por cada revolución de la rueda.

8. Describa la posición normal de un ángulo.

9. Dada $f(x) = 5x - 2$, halle $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

10. Diga: *a)* si pueden ser idénticos el dominio y el recorrido de una función; *b)* el recorrido de $f(x)$ y $g(x)$ en el problema 9 y *c)* si el conjunto $A = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$ es una función.

CAPITULO 2

Funciones trigonométricas (ángulos)

2.1. DEFINICION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE CUALQUIER ANGULO

En el artículo precedente se vio que un símbolo común para representar una función es f y también que el símbolo $f(x)$ representa tanto a la función misma como a su valor en x. Vamos ahora a definir un tipo de funciones denominadas *funciones trigonométricas.*

Existen seis de esas funciones: la función *seno,* la función *coseno,* la función *tangente,* la función *cotangente,* la función *secante* y la función *cosecante.* En vez de usar una sola letra para representar cada función trigonométrica se emplearán tres letras para cada una de ellas: *sen* para la *función seno, cos* para la *función coseno, tan* para la *función tangente, cot* para la *función cotangente, sec* para la *función secante* y *csc* para la *función cosecante.*

Por tanto, el símbolo sen (θ) representa la función seno evaluada en θ; sin embargo como el símbolo sen (θ) se lee usualmente "seno de θ", se acostumbra, al usar las abreviaturas de las funciones trigonométricas, omitir los paréntesis que encierran al argumento. Cuando se desee hacer mención de todas las funciones trigonométricas, sin especificar una en particular, se utilizará el símbolo $T(\theta)$.

Debe ahora señalarse una peculiaridad de la notación de las funciones: el símbolo f se puede usar para representar diferentes reglas; esto es, si se escribe $f(x) =$ (algo), la expresión a la derecha del signo de igualdad dará la regla. Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, la regla será elevar al cubo los elementos del dominio; si $f(x) = \sqrt{x}$, la regla será extraer la raíz cuadrada de los elementos del dominio. Sin embargo, para las funciones trigonométricas la regla está implícita en el símbolo de la función: por ejemplo *sen* **siempre** implica la regla para la función seno. Consideraciones análogas son válidas para los símbolos de las otros funciones trigonométricas.

En las definiciones que siguen, se va a establecer el dominio y el recorrido de las funciones trigonométricas, aunque deberían ser evidentes.

Sea θ un ángulo en posición normal y sea P un punto cualquiera (*distinto de 0*) en el lado terminal de θ (figura 2.1-1), o sea que $r > 0$ (r mayor que cero).

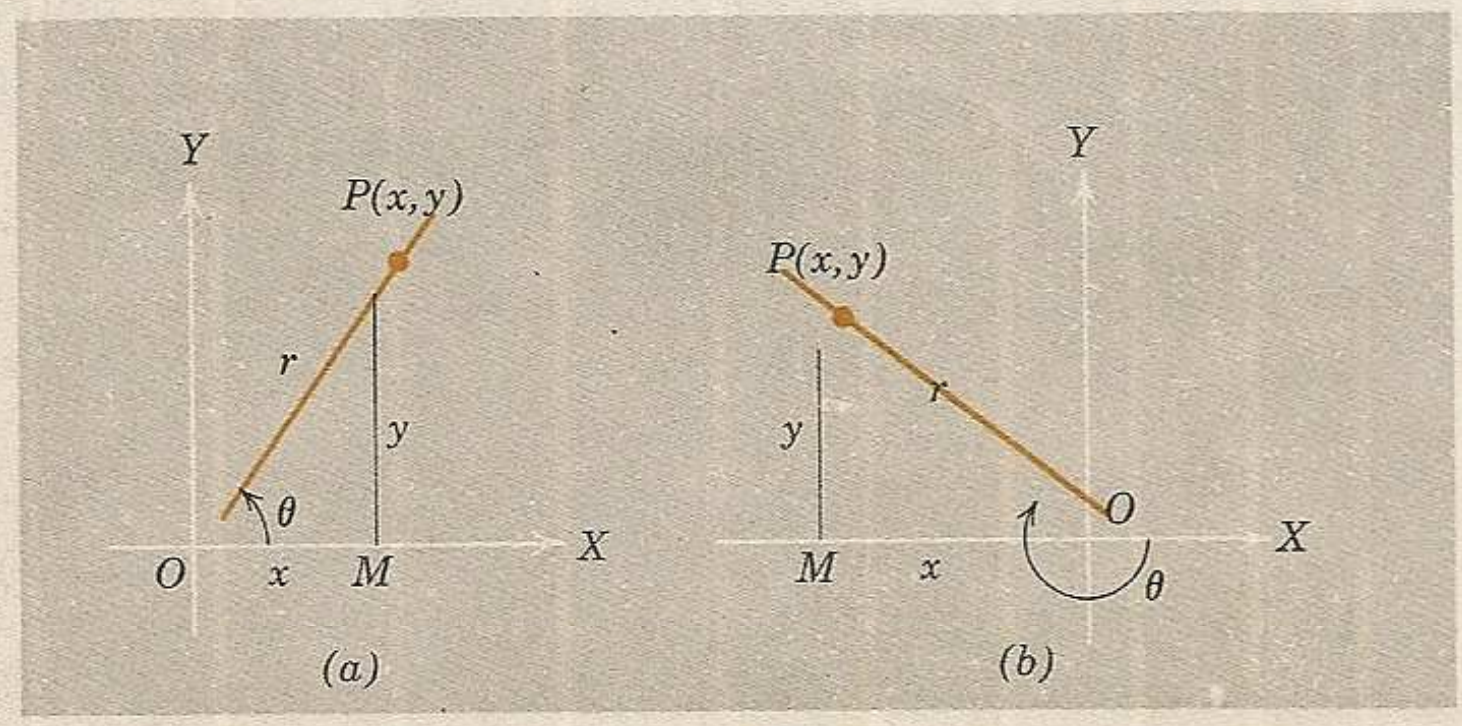


Figura 2.1-1

Las funciones trigonométricas de θ se definen como se muestra en la tabla 2.1:

TABLA 2-1

Función	Regla de correspondencia	Dominio	Recorrido
$\operatorname{sen}\theta$	$\dfrac{\text{ordenada de } P}{\lvert\text{radio vector de } P\rvert^*} = \dfrac{y}{r}$.	Todos los ángulos	$-1 \leqslant$ Todos los números reales. $\leqslant 1$
$\cos\theta$	$\dfrac{\text{abscisa de } P}{\lvert\text{radio vector de } P\rvert} = \dfrac{x}{r}$.	Todos los ángulos	$-1 \leqslant$ Todos los números reales. $\leqslant 1$
$\tan\theta$	$\dfrac{\text{ordenada de } P}{\text{abscisa de } P} = \dfrac{y}{x}$.	Todos los ángulos para los cuales $x \neq 0$.	Todos los números reales.
$\cot\theta$	$\dfrac{\text{abscisa de } P}{\text{ordenada de } P} = \dfrac{x}{y}$.	Todos los ángulos para los cuales $y \neq 0$.	Todos los números reales.
$\sec\theta$	$\dfrac{\lvert\text{radio vector de } P\rvert}{\text{abscisa de } P} = \dfrac{r}{x}$.	Todos los ángulos para los cuales $x \neq 0$.	Todos los números reales $\leqslant -1$ y $\geqslant 1$.
$\csc\theta$	$\dfrac{\lvert\text{radio vector de } P\rvert}{\text{ordenada de } P} = \dfrac{r}{y}$.	Todos los ángulos para los cuales $y \neq 0$.	Todos los números reales $\leqslant -1$ ó $\geqslant 1$.

* $\lvert$radio vector de $P\rvert$ indica la magnitud del radio vector de P.

Estas razones; aun cuando están definidas en términos de las coordenadas del punto $P(x, y)$, dependen solamente del hecho de que P es un punto *cualquiera* del lado terminal de θ, diferente del origen.

En efecto: si se escoge cualquier otro punto $P'(x', y')$ sobre OP, con radio vector r', siendo $r' > 0$ (figura 2.1-2), según las definiciones dadas se puede escribir:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y'}{r'};\ \cos\theta = \frac{x'}{r'};\ \tan\theta = \frac{y'}{x'},\ \text{etc.};$$

pero como los triángulos OMP y $OM'P'$ son semejantes, se ve que

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}; \frac{x}{r} = \frac{x'}{r'}; \frac{y}{x} = \frac{y'}{x'},\ \text{etc.}$$

Por tanto; el valor de sen θ o el de cualesquiera de las otras funciones trigonométricas, *depende* solamente de la *magnitud* del ángulo θ y *no* del punto P que se haya tomado en el lado terminal de θ.

Como los ángulos coterminales tienen los mismos lados inicial y terminal, y las funciones trigonométricas dependen solamente de la posición del lado terminal, se concluye el:

Teorema 2.1-1: *Una función trigonométrica de un ángulo, es igual a la misma función trigonométrica de sus ángulos coterminales.*

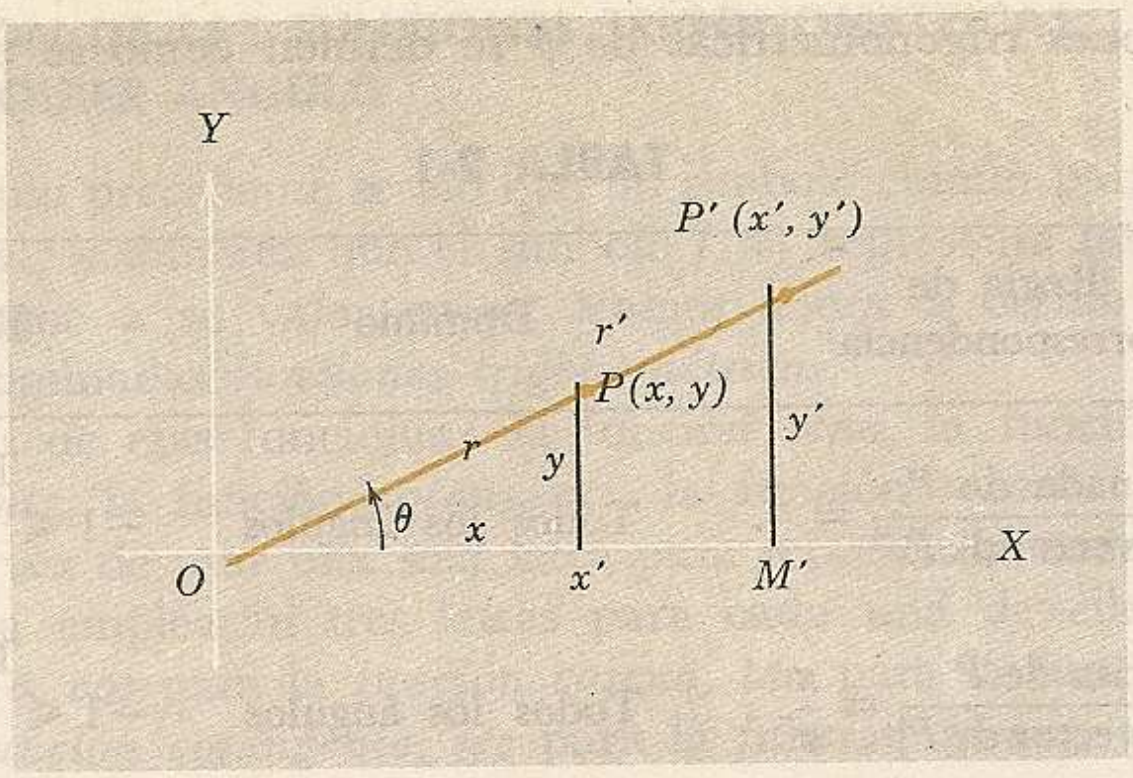


Figura 2.1-2

Notas relativas a las definiciones:

1. Recuerde que θ representa la *magnitud* del ángulo θ. Como en las definiciones anteriores no se ha especificado ninguna unidad de medida, θ puede expresarse en radianes o en grados. En el capítulo 4 se mostrará que todo número real puede estar incluido en el dominio de las funciones trigonométricas.

2. La restricción en el dominio de tan θ, cot θ, sec θ y csc θ, se debe a que en álgebra no está definida la división por cero.[1]

3. No se usa punto al final de las abreviaturas empleadas para designar las funciones trigonométricas.

4. En este libro se evitará el uso de las abreviaturas trigonométricas cuando no vayan acompañadas del símbolo del argumento.

5. Las funciones trigonométricas se pueden agrupar en pares llamados cofunciones: *seno* y *coseno*, *tangente* y *cotangente*, *secante* y *cosecante*. En cada uno de estos pares, *cada función*, es la *cofunción de la otra*.

Ejemplo. Describa con palabras la regla de correspondencia implícita en el símbolo sen θ.

Solución: Usando cualquier punto (distinto del origen) situado en el lado terminal de un ángulo θ en posición normal, formar la razón de la ordenada al radio vector.

EJERCICIOS 2.1

1. Describir con palabras la regla de correspondencia implícita en los símbolos: *a)* cos θ; *b)* tan θ; *c)* cot θ; *d)* sec θ y *e)* esc θ.

[1] La fracción $a/b = c$ implica que $a = b \cdot c$. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $0 = b \cdot c$, que es cierta para $b \neq 0$, únicamente si $c = 0$. Por tanto, $0/b = 0$, para $b \neq 0$. Si $a \neq 0$ y $b = 0$, la fracción $a/0$ no tiene significación, puesto que $a = 0 \cdot c$ implica que $a = 0$, lo cual es contrario a la hipótesis de que $a \neq 0$. Si $a = 0$ y $b = 0$, la fracción es indeterminada, ya que esto implica $0 = 0 \cdot c$, que se cumple para toda c.

2. Muestre que las funciones trigonométricas de un ángulo del 2º cuadrante son independientes de la selección de P en el lado terminal, si P es distinto de θ.

3. Basándose en la figura 2.1-1 y en las definiciones de las funciones trigonométricas ¿cuáles cree usted que sean los valores máximos de sen θ y cos θ?

4. Diga si tan θ tiene o no un valor máximo y por qué.

5. ¿Puede ser sen $\theta = 2$? ¿Por qué?

6. ¿Puede ser csc $\theta < 1$? ¿Por qué?

7. Establezca una relación entre sen θ y csc θ a partir de sus definiciones. ¿Existen otras relaciones similares para las demás funciones trigonométricas?

8. Las funciones trigonométricas pueden representarse por segmentos de recta. En la figura 2.1-3, muestre que sen $\theta = AP$, cos $\theta = OA$, tan $\theta = BC$, cot $\theta = ED$, sec $\theta = OC$ y csc $\theta = OD$.

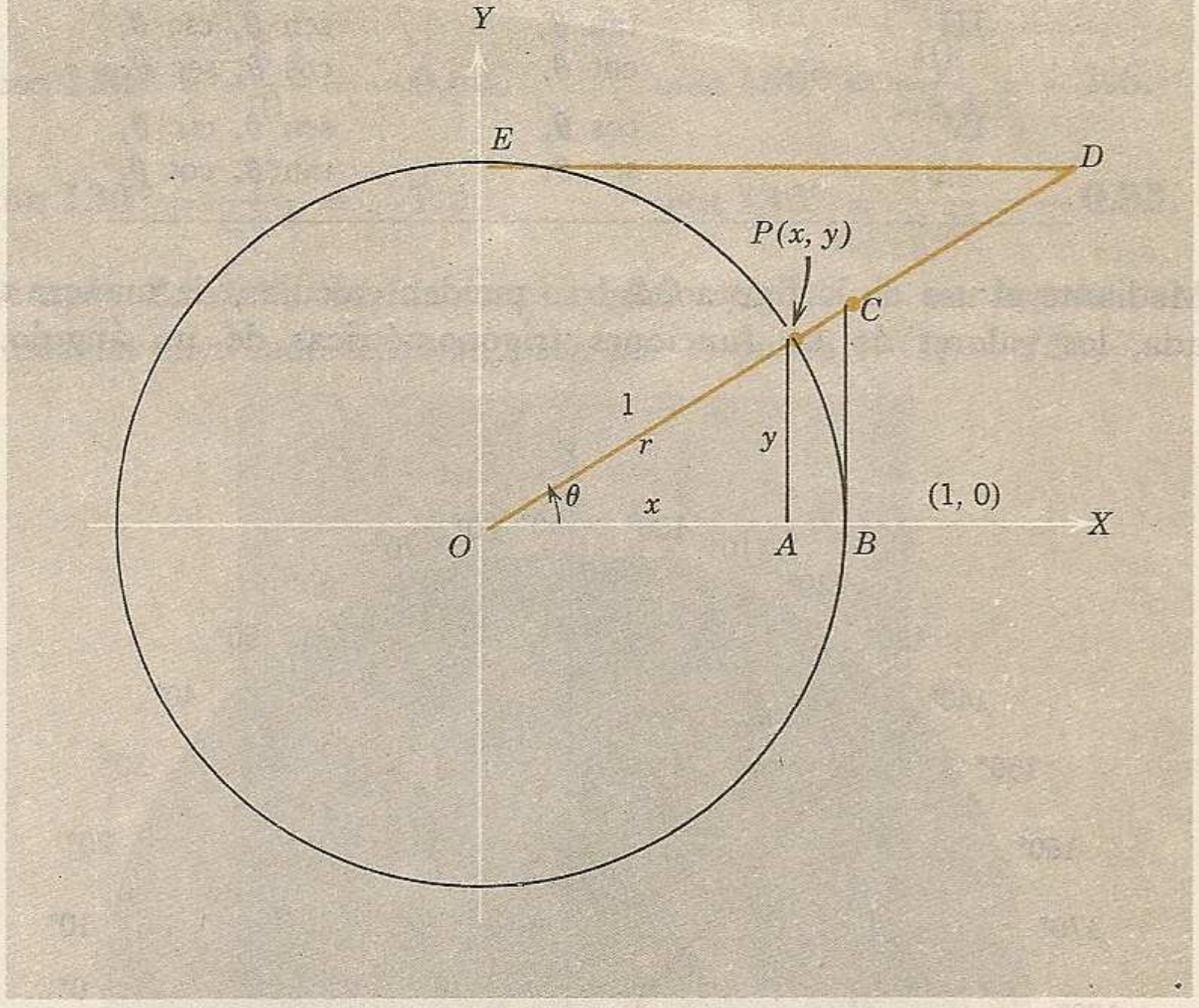


Figura 2.1-3

9. Trace los segmentos que representan las funciones trigonométricas de un ángulo del 2º cuadrante (vea el problema anterior).

2.2. SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Los signos de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, dependen de los signos de la ordenada y de la abscisa de un punto arbitrario del lado terminal. Cuando éste pasa de un cuadrante a otro, el radio vector permanece siempre positivo, en tanto que siempre hay un cambio en el signo de la abscisa o de la ordenada. En el primer cuadrante ambas coor-

denadas son positivas, en el segundo cuadrante la abscisa x es negativa y la ordenada y es positiva; en el tercer cuadrante ambas, x y y, son negativas y en el cuarto cuadrante x es positiva y y negativa. En la tabla 2.2 se muestran los signos de las funciones trigonométricas.

TABLA 2.2

Cuadrante del ángulo	Funciones positivas	Funciones negativas
I	Todas	Ninguna
II	sen θ, csc θ.	cos θ, sec θ, tan θ, cot θ.
III	tan θ, cot θ.	sen θ, csc θ, cos θ, sec θ.
IV	cos θ, sec θ.	sen θ, csc θ, tan θ, cot θ.

Mediante el uso de la figura 2.2-1 se pueden calcular, de manera aproximada, los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo. La

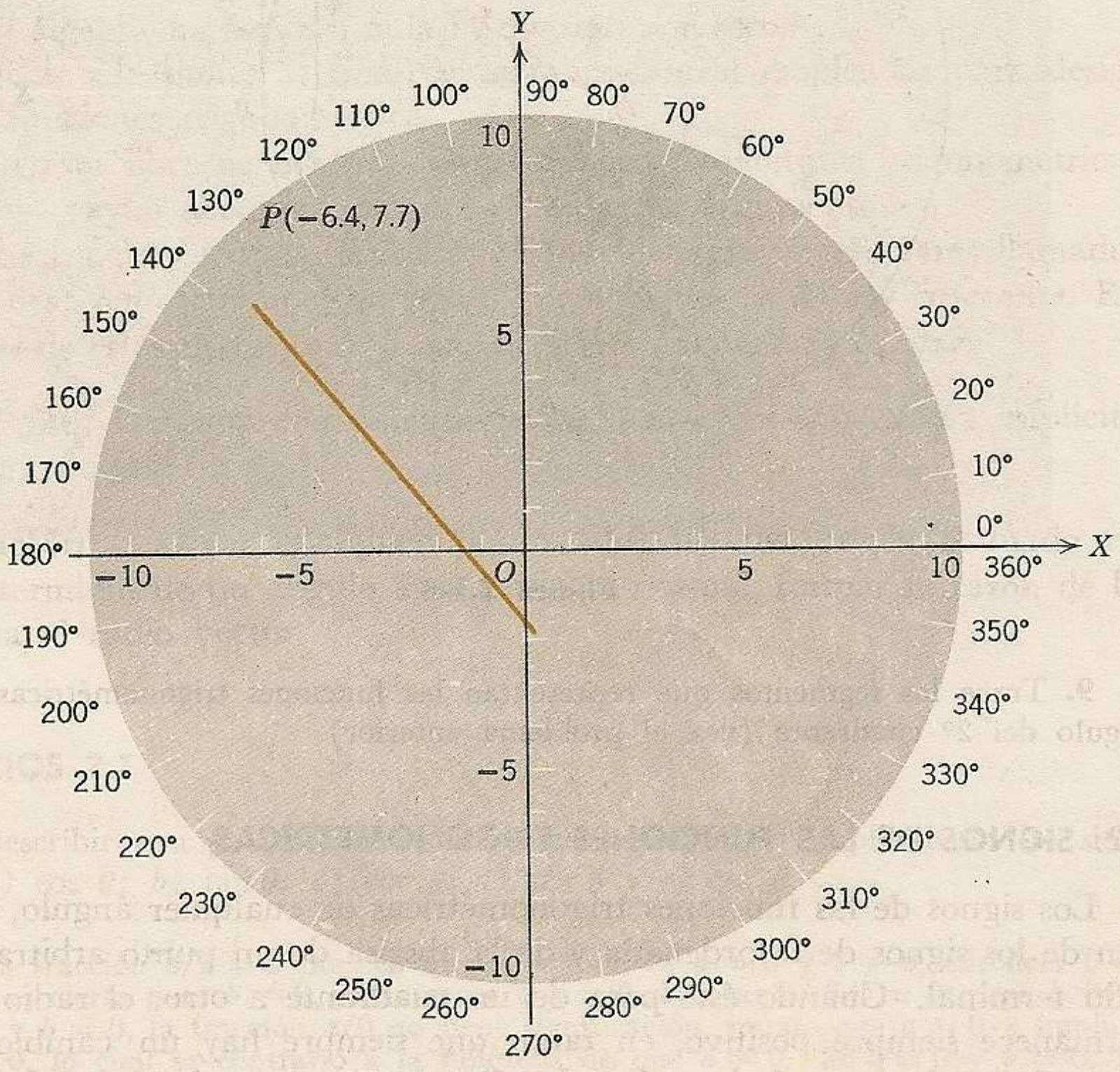


Figura 2.2-1

abscisa, la ordenada y el radio vector se determinan gráficamente y luego se aplican las definiciones de las funciones trigonométricas y se calculan sus valores. Por comodidad se ha escogido para el radio, $r = 10$.

Ejemplo 1. Use la figura 2.2-1, para hallar los valores aproximados de las funciones trigonométricas de 130°.

Solución: Trace un ángulo de 130° en posición normal y tome P en la intersección del lado terminal con la circunferencia:

$$x = -6.4;\ y = 7.7 \text{ y } r = 10$$

y por las definiciones,

$$\textbf{sen } 130° = \frac{7.7}{10} = \mathbf{0.77.} \qquad \textbf{csc } 130° = \frac{10}{7.7} = \mathbf{1.3.}$$

$$\textbf{cos } 130° = \frac{-6.4}{10} = \mathbf{-0.64.} \qquad \textbf{sec } 130° = \frac{10}{-6.4} = \mathbf{-1.6.}$$

$$\textbf{tan } 130° = \frac{7.7}{-6.4} = \mathbf{-1.2.} \qquad \textbf{cot } 130° = \frac{-6.4}{7.7} = \mathbf{-0.83.}$$

Ejemplo 2. Halle las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal cuyo lado terminal pasa por el punto $(-1, -\sqrt{3})$.

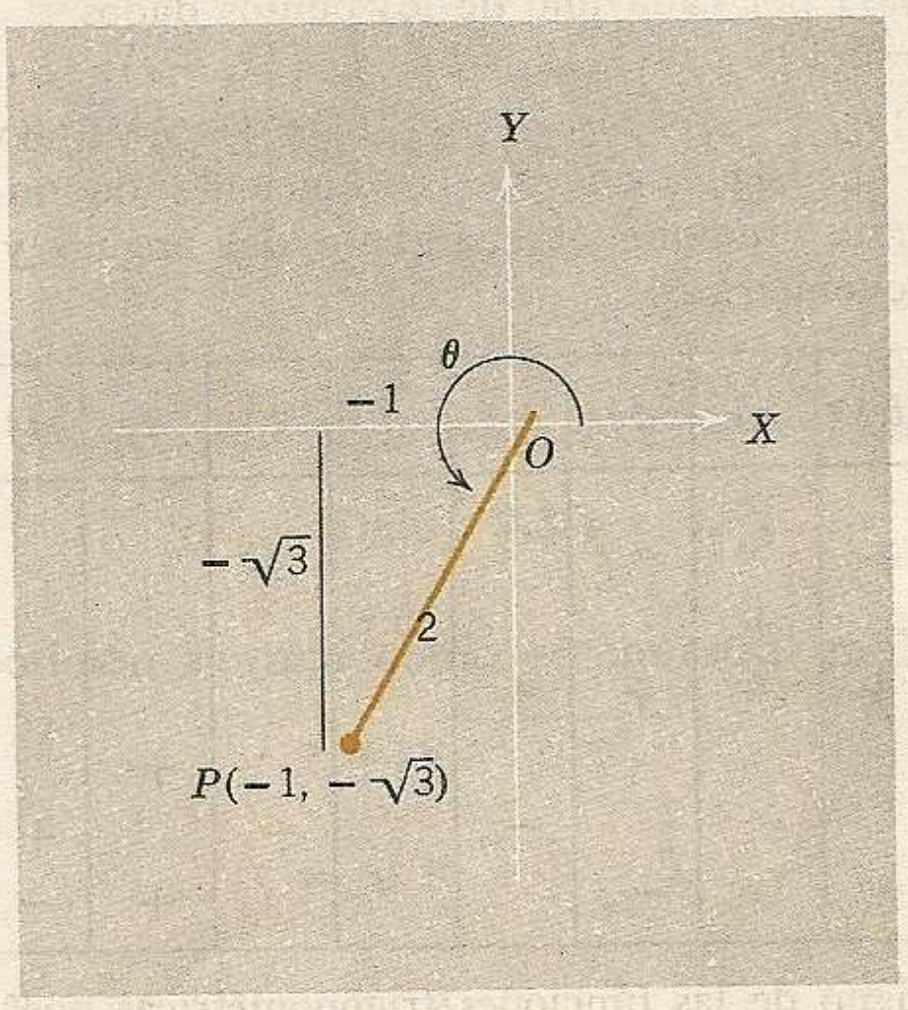


Figura 2.2-2

Solución: Trace θ como se muestra en la figura 2.2-2; como $x = -1$, y $y = -\sqrt{3}$, entonces $r = 2$. A partir de las definiciones, resulta

$$\textbf{sen } \theta = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \textbf{csc } \theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\textbf{cos } \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2}. \qquad \textbf{sec } \theta = \frac{r}{x} = \frac{2}{-1} = \mathbf{-2.}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}. \qquad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

EJERCICIOS 2.2

1. Use la figura 2.2-1 para hallar los valores aproximados de las funciones trigonométricas de los ángulos:

a) 30°; *b)* 45°; *c)* 120°; *d)* 250°; *e)* 335°; *f)* $\frac{\pi}{9}$; *g)* $\frac{7\pi}{9}$; *h)* $\frac{5\pi}{2}$; *i)* $\frac{11\pi}{5}$; *j)* 5.63; *k)* 2.22 y *l)* 0.263.

2. Usando ángulos coterminales adecuados, halle los valores aproximados de las funciones trigonométricas de

a) $-30°$; *b)* $-120°$; *c)* $\frac{-4\pi}{3}$; *d)* $\frac{-3\pi}{4}$; *e)* 400°; *f)* 630°; *g)* $-530°$ y *h)* $-800°$.

3. Indique los cuadrantes en los cuales: *a)* sen θ es positivo; *b)* cos θ es positivo; *c)* tan θ es positiva; *d)* sen θ es negativo; *e)* cos θ es negativo y *f)* tan θ es negativa.

4. A partir de las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal y considerando $r = 1$, escriba las definiciones de tan θ, cot θ, sec θ, y csc θ en términos de sen θ y cos θ. Muestre que el signo de tan θ, en los diferentes cuadrantes, depende de los de sen θ y cos θ.

5. Halle las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal, cuyo lado terminal pasa por cada uno de los puntos dados.

a) $(3, 4)$; *b)* $(-5, 3)$; *c)* $(-12, =5)$; *d)* $(12, -9)$; *e)* $(-3, -4)$; *f)* $(4, 9)$; *g)* $(3, -3)$; *h)* $(-1, \sqrt{3})$; *i)* $(-2, 1)$ y *j)* $(4\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

6. En la tabla que sigue, dos de las funciones de un ángulo tienen los signos que se muestran. Indique el cuadrante del ángulo y los signos de las demás funciones trigonométricas.

	a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*	*f)*	*g)*	*h)*	*i)*	*j)*	*k)*	*l)*
Cuadrante												
sen θ	+	+					+					
cos θ			+			+				−	+	
tan θ		+	−	+	+					+	+	
cot θ						+		+				−
sec θ	−				−		−		+			
csc θ				−				+	−			+

7. Establezca el signo de las funciones trigonométricas que siguen: *a)* sen 30; *b)* cos $\pi°$; *c)* tan$(\pi/2)°$ y *(d)* cos 1000°.

8. Dado $T(\theta) = -0.176$, nombre las funciones trigonométricas posibles y establezca en qué cuadrante está θ para cada una de ellas.

2.3. DADA UNA FUNCION TRIGONOMETRICA HALLAR TODAS LAS DEMAS

Si se conoce el cuadrante y el valor de una de las funciones trigonométricas de un ángulo, es posible obtener los valores de las demás funcio-

nes trigonométricas. El método, en general, consiste en dibujar el ángulo en posición normal, determinar luego un punto en el lado terminal del ángulo a partir de las condiciones dadas, y sustituir, finalmente, las coordenadas y el radio vector del punto en las definiciones de las funciones trigonométricas.

Ejemplo 1. Si $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ y θ es un ángulo del segundo cuadrante, halle las demás funciones trigonométricas de θ.

Solución: De la definición de $\tan\theta = y/x$, se tiene

$$\frac{y}{x} = -\frac{3}{4}.$$

En el segundo cuadrante hay varios puntos situados en el lado terminal de θ cuyas coordenadas forman la razón $-\frac{3}{4}$; algunos ejemplos son: $(-4, 3)$, $(-8, 6)$ y $(-1, \frac{3}{4})$. Suponga que elige el punto $P(-4, 3)$.

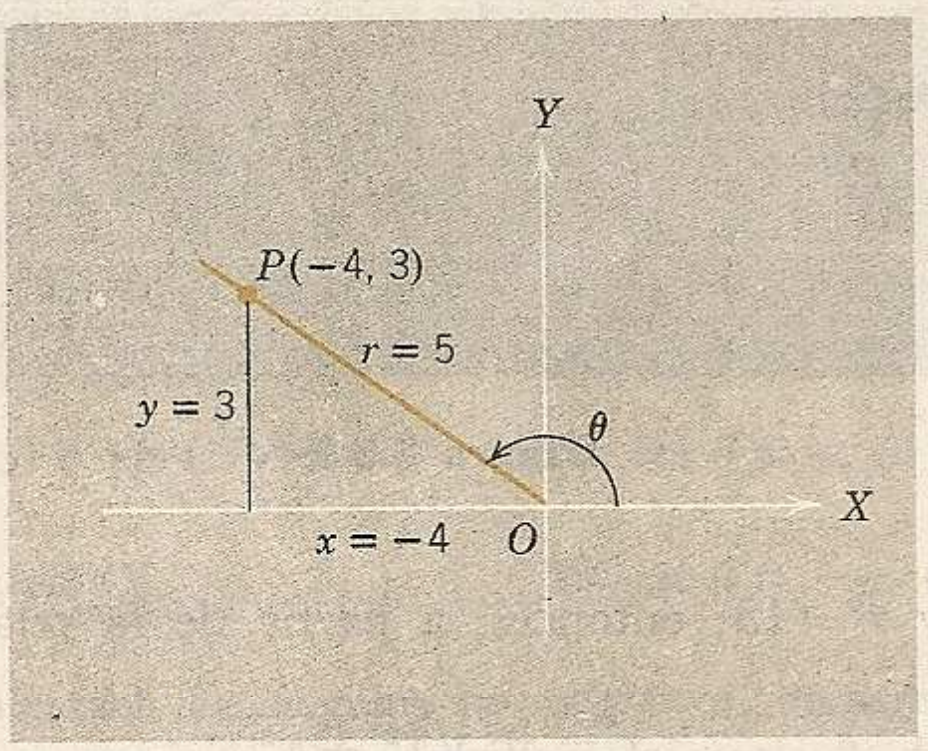


Figura 2.3-1

Trace θ en posición normal como se muestra en la figura 2.3-1; de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

tenemos

$$r = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

Entonces

$$\textbf{sen}\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}. \quad \textbf{cos}\,\theta = \frac{x}{r} = -\frac{4}{5}. \quad \textbf{tan}\,\theta = \frac{y}{x} = -\frac{3}{4}.$$

$$\textbf{csc}\,\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{3}. \quad \textbf{sec}\,\theta = \frac{r}{x} = -\frac{5}{4}. \quad \textbf{cot}\,\theta = \frac{x}{y} = -\frac{4}{3}.$$

Si no se especifica el cuadrante del ángulo, existen por lo general **dos** ángulos no negativos menores de 360°, que tienen el mismo valor para una función trigonométrica dada.

Ejemplo 2. Si $\text{sen}\,\theta = -\frac{5}{13}$, halle las demás funciones trigonométricas de θ.

Solución: Puesto que no se especifica el cuadrante de θ, las condiciones serán satisfechas por dos ángulos menores de 360°. Uno es un ángulo del tercer cuadrante y otro es un ángulo del cuarto cuadrante (figura 2.3-2). De la definición

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r},$$

se tiene

$$\frac{y}{r} = -\frac{5}{13}.$$

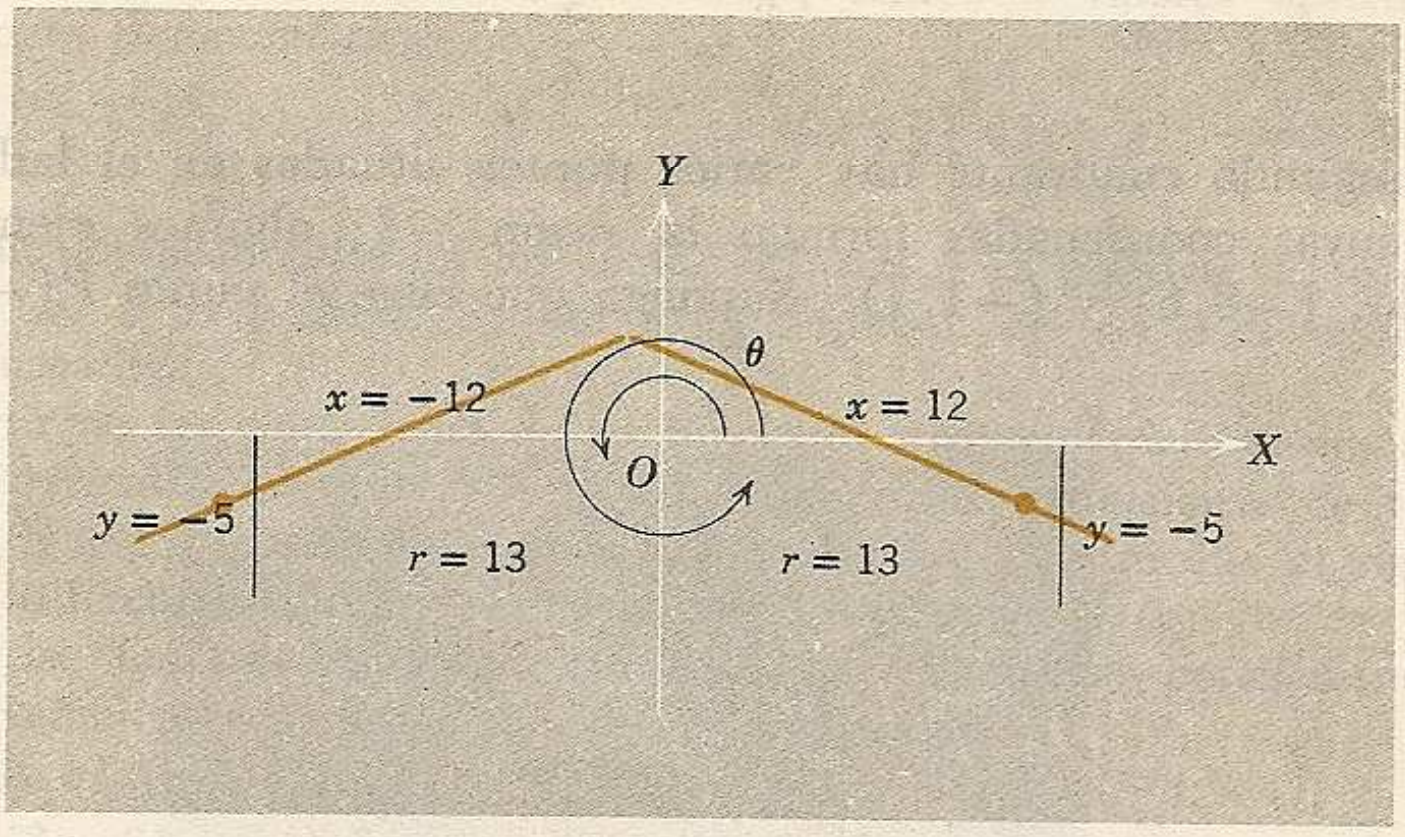


Figura 2.3-2

Escoja $y = -5$ y $r = 13$; entonces, a partir de la relación $x^2 + y^2 = r^2$, se tiene

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2},$$

de donde

$$x = \pm 12.$$

En consecuencia,

$$\textbf{sen}\,\theta = -\tfrac{5}{13}. \qquad \textbf{cos}\,\theta = \mp\tfrac{12}{13}. \qquad \textbf{tan}\,\theta = \pm\tfrac{5}{12}.$$
$$\textbf{csc}\,\theta = -\tfrac{13}{5}. \qquad \textbf{sec}\,\theta = \mp\tfrac{13}{12}. \qquad \textbf{cot}\,\theta = \pm\tfrac{12}{5}.$$

(Cuando se emplean dobles signos, los superiores corresponden a una solución y los inferiores a la otra).

EJERCICIOS 2.3

Halle las funciones trigonométricas del ángulo que satisface las condiciones dadas:

1. $\tan\theta = \frac{3}{4}$, θ en CI.
2. $\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{5}$, θ en CII.
3. $\cos\theta = \frac{3}{5}$, θ en CIV.
4. $\sec\theta = -\frac{13}{12}$, θ en CIII.

5. $\cot\theta = -\frac{8}{15}$, θ en CIV.

6. $\operatorname{sen}\theta = \frac{13}{12}$, θ en CI.

7. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{7}{25}$, θ en CIII.

8. $\cos\theta = -\frac{1}{17}$, θ en CII.

9. $\cos\theta = -\frac{2}{5}$, θ en CII.

10. $\tan\theta = -\frac{5}{4}$, θ en CIV.

11. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{40}{41}$, θ en CIV.

12. $\sec\theta = -\frac{41}{9}$, θ en CII.

13. $\tan\theta = \frac{5}{12}$.

14. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$.

15. $\cos\theta = -\frac{5}{13}$.

16. $\cot\theta = \frac{8}{15}$.

17. $\sec\theta = \frac{5}{4}$.

18. $\csc\theta = -\frac{13}{5}$.

19. $\tan\theta = -1$.

20. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{7}$.

21. $\cos\theta = -\frac{2}{5}$.

22. $\cot\theta = -2$.

23. $\tan\theta = \frac{40}{9}$.

24. $\cos\theta = -\frac{9}{41}$.

25. $\operatorname{sen}\theta = 0.32$, θ en CI.

26. $\cos\theta = 0.28$, θ en CIV.

27. $\tan\theta = -1.5$, θ en CIV.

28. $\cos\theta = \pi$, θ en CIII.

29. $\sec\theta = \frac{\pi}{2}$, θ en CI.

30. $\csc\theta = -\pi$, θ en CIII.

31. Indique cuáles son los ángulos no negativos, menores de 360° que no están incluidos en la proposición que precede al ejemplo 2, del artículo 2.3.

32. Dado $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$, verifique que

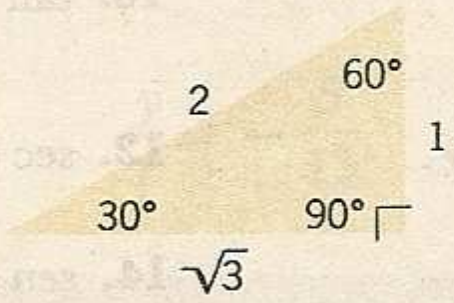
a) $(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$.
b) $1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$.
c) $1 + (\cot\theta)^2 = (\csc\theta)^2$.

2.4. VALORES EXACTOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°

En este artículo y en el que sigue veremos cómo se calculan los valores exactos de las funciones trigonométricas de ciertos ángulos (vea también el problema 7.5-7). Recuerde que para encontrar estos valores, es necesario determinar las coordenadas (x, y) y el radio vector r de un punto cualquiera del lado terminal del ángulo en posición normal. La palabra *exacto* se empleará en el sentido siguiente: el valor exacto de la raíz cuadrada de tres se puede expresar como $\sqrt{3}$, en tanto que un valor aproximado, con tres cifras decimales, es 1.732. Análogamente, el símbolo π

representa un número exacto y 3.142 su valor aproximado con tres cifras decimales.

Recuerde (geometría plana) que en un triángulo cuyos ángulos miden 30°, 60° y 90°, los lados opuestos a estos ángulos son proporcionales a los números 1, $\sqrt{3}$ y 2, respectivamente (vea la figura 2.4-1).



Parecido a la escuadra de 60° o cartabón.

Figura 2.4-1

Funciones trigonométricas de 30°

Trace un ángulo de 30° en posición normal (figura 2.4-2). Como P es arbitrario, escoja $OP = 2$; entonces las coordenadas de P son $(\sqrt{3}, 1)$. De las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene

$$\textbf{sen } 30° = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}. \qquad \textbf{csc } 30° = \frac{r}{y} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\textbf{cos } 30° = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \textbf{sec } 30° = \frac{r}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\textbf{tan } 30° = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \textbf{cot } 30° = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

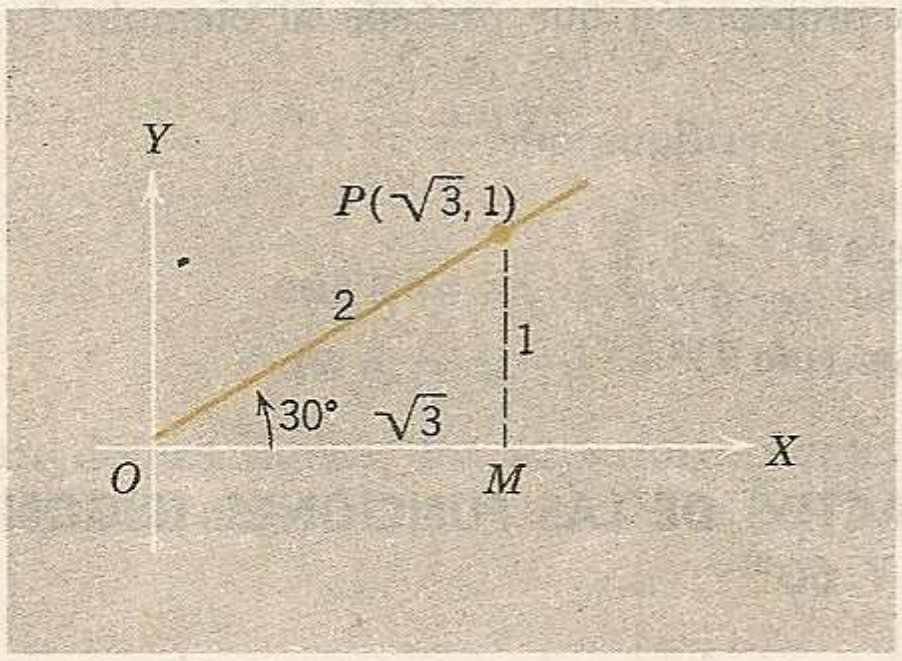


Figura 2.4-2

Funciones trigonométricas de 60°

Trace un ángulo de 60° en posición normal (figura 2.4-3) y elija $OP = 2$; entonces, las coordenadas de P son $(1, \sqrt{3})$ y de las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene

$$\textbf{sen } 60° = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \textbf{csc } 60° = \frac{r}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\textbf{cos } 60° = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}. \qquad \textbf{sec } 60° = \frac{r}{x} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\textbf{tan } 60° = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}. \qquad \textbf{cot } 60° = \frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

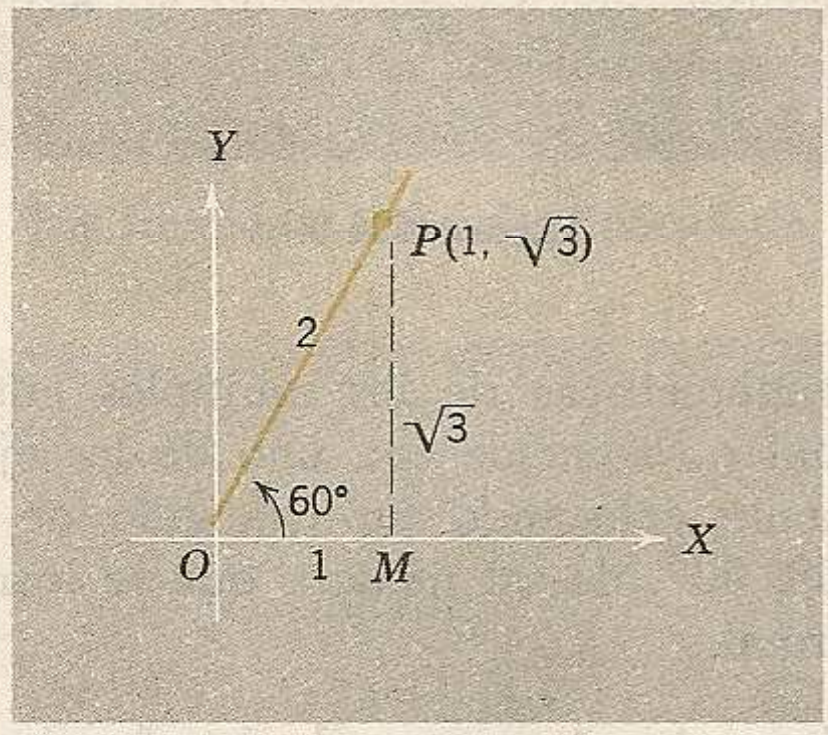


Figura 2.4-3

Funciones trigonométricas de 45°

En geometría plana se muestra que en un triángulo rectángulo isósceles, los lados son proporcionales a los números 1, 1, y $\sqrt{2}$ (figura 2.4-4).

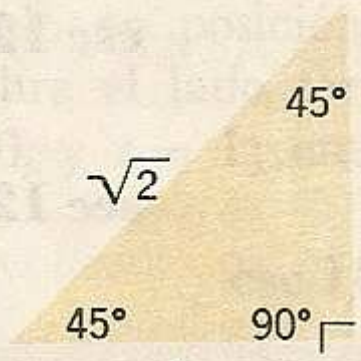


Figura 2.4-4

{ Parecido a la escuadra de 45°

*La hipotenusa de la escuadra mide lo mismo al cateto mayor del cartabón.

Trace un ángulo de 45° en posición normal (figura 2.4-5) y elija $OP = \sqrt{2}$; entonces, las coordenadas de P son $(1, 1)$ y de las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene

$$\textbf{sen } 45° = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \textbf{csc } 45° = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

$$\textbf{cos } 45° = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \textbf{sec } 45° = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

$$\textbf{tan } 45° = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1. \qquad \textbf{cot } 45° = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1.$$

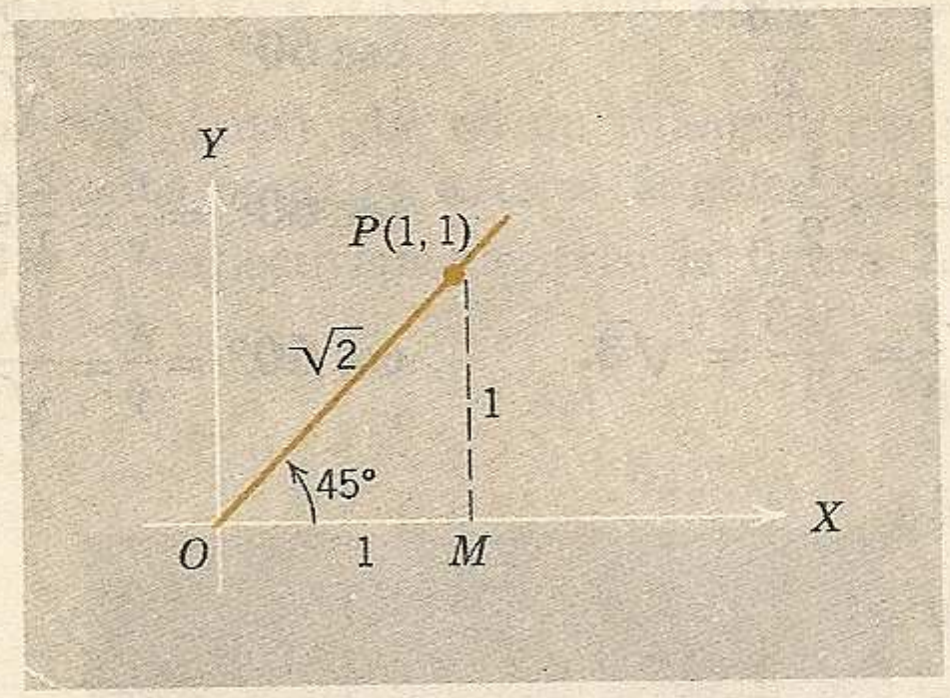


Figura 2.4-5

Las funciones trigonométricas de los múltiplos enteros de 30° o de 45°, cuyo lado terminal no coincide con uno de los ejes de coordenadas, se determinan fácilmente colocando un triángulo de ángulos 30°, 60°, 90° o uno de 45°, 45°, 90°, de tal manera que se forme el ángulo apropiado en posición normal.

Ejemplo. Halle los valores exactos de las funciones trigonométricas de 120°.

Solución: Coloque un triángulo de ángulos 30°, 60° y 90° en la posición que se muestra en la figura 2.4-6. El punto $P(-1, \sqrt{3})$ tiene por radio vector $r = 2$ y de las definiciones de las funciones trigonométricas se tiene:

$$\textbf{sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad \textbf{csc } 120° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\textbf{cos } 120° = \frac{-1}{2}. \qquad \textbf{sec } 120° = \frac{2}{-1} = -2.$$

Colocando adecuadamente alguna de las escuadras y los signos en los cuadrantes se facilita éste trabajo.

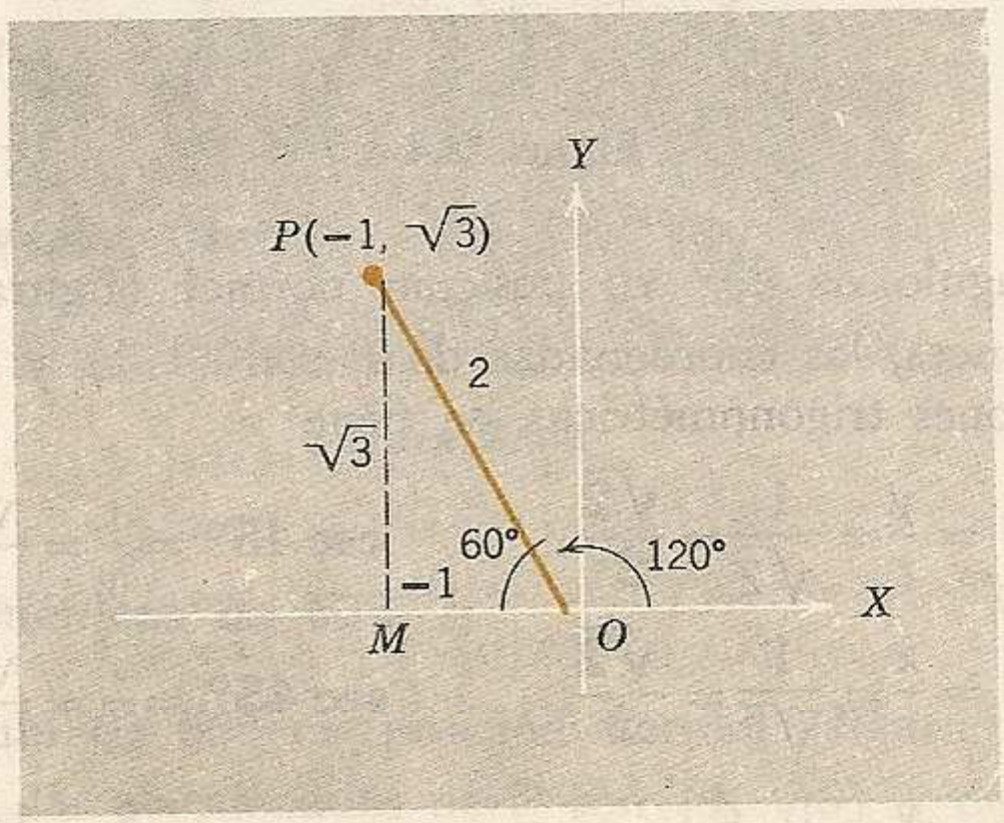


Figura 2.4-6

$$\textbf{tan } 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}. \qquad \textbf{cot } 120^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}.$$

2.5. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE MÚLTIPLOS DE $\frac{\pi}{2}$

Los múltiplos de $\pi/2$, en posición normal, son ángulos cuyo lado terminal coincide con uno de los ejes de coordenadas. Para estos ángulos, una de las coordenadas de un punto del lado terminal es nula y, puesto que algebraicamente no es válida la división entre cero, dos de las funciones trigonométricas para cada ángulo de este tipo, no existen.

Ejemplo. Halle las funciones trigonométricas de 180°.

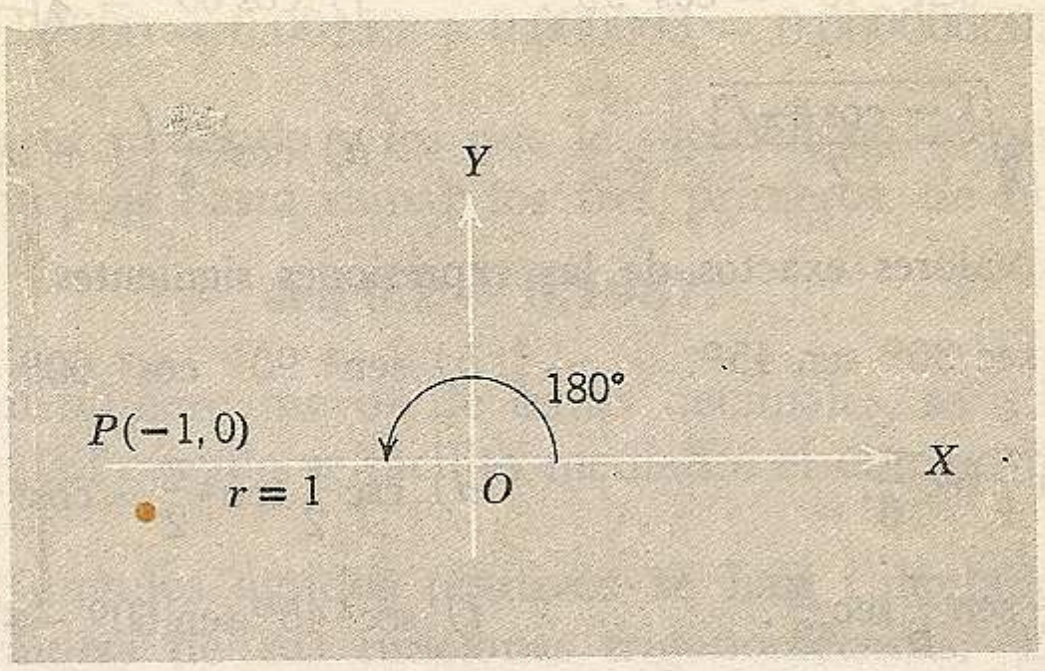


Figura 2.5-1

Solución: Trace el ángulo en posición normal, tal como se muestra en la figura 2.5-1 y elija sobre el lado terminal el punto $P(-1, 0)$. En consecuencia, $x = -1$, $y = 0$, y $r = 1$; entonces por las definiciones,

$$\textbf{sen } 180^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = \mathbf{0}. \qquad \textbf{csc } 180^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{0} \ (\textbf{\textit{no existe}}).$$

$$\textbf{cos } 180^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = \mathbf{-1}. \qquad \textbf{sec } 180^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{-1} = \mathbf{-1}.$$

$$\textbf{tan } 180^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = \mathbf{0}. \qquad \textbf{cot } 180^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} \ (\textbf{\textit{no existe}}).$$

EJERCICIOS 2.5

1. Trace en posición normal los ángulos que se indican y calcule los valores exactos de sus funciones trigonométricas.

a) 135°; *b)* 240°; *c)* 210°; *d)* 330°; *e)* 0°; *f)* 90°; *g)* 270°; *h)* $\frac{5\pi}{6}$; *i)* $\frac{5\pi}{4}$; *j)* $\frac{7\pi}{6}$; *k)* $\frac{14\pi}{3}$. *l)* −60°; *m)* −240° y *n)* $\frac{-2\pi}{3}$

2. *a)* Complete la tabla con los valores exactos de las funciones.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen θ							
cos θ							
tan θ							

b) Construya una tabla análoga a la anterior para θ en radianes.

3. Compruebe que las siguientes proposiciones son verdaderas. La notación $\text{sen}^2\theta$ significa $(\text{sen}\ \theta)^2$.

a) $\text{sen}^2\ 45° + \cos^2\ 45° = 1$.

b) $1 + \tan^2 \frac{\pi}{6} = \sec^2 \frac{\pi}{6}$.

c) $1 + \cot^2 \frac{\pi}{3} = \csc^2 \frac{\pi}{3}$.

d) $2\ \text{sen}\ 60°\ \cos\ 60° = \text{sen}\ 120°$.

e) $\cos^2\ 45° - \text{sen}^2\ 45° = \cos\ 90°$.

f) $\cos 60° = \sqrt{\frac{1 + \cos 120°}{2}}$.

g) $\text{sen}\frac{2\pi}{3} = \sqrt{\frac{1 - \cos 4\pi/3}{2}}$.

h) $\cos^2 \frac{\pi}{4}\left(1 + \tan^2 \frac{4}{\pi}\right) = 1$.

4. Halle los valores exactos de las expresiones siguientes.

a) $\tan^2\ 60°\ \sec\ 30°\ \text{sen}\ 45°$.

b) $\text{sen}^2\ 90°\ \cos^2\ 60°\ \sec\ 30°$.

c) $\cos^2 \pi \tan \frac{\pi}{4} \sec \frac{\pi}{6}$.

d) $\csc \frac{\pi}{2} \text{sen}^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 \frac{\pi}{3}$.

e) $\cot 60° - \text{sen} \frac{\pi}{6} \sec \frac{\pi}{3}$.

f) $\sec^2 45° \text{ sen } 60° - 3 \tan \frac{2\pi}{3}$.

g) $\text{sen} \frac{\pi}{2} \cos \pi + \tan \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{3}$.

h) $\text{sen}\ 45°\ \cos\ 45°\ (\tan 45° + \cot 45°)$.

2.6. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS AGUDOS POSITIVOS

En los dos artículos anteriores se determinaron las funciones trigonométricas de ciertos ángulos usando un método especial. Para otros ángulos se puede también calcular los valores exactos de sus funciones trigonométricas, aun cuando para ello es necesario efectuar operaciones más laboriosas. En cursos superiores de matemáticas se demuestra, que si existen las funciones trigonométricas de un ángulo, sus valores se pueden calcular mediante el uso de "series infinitas convergentes". (La definición de los términos "series infinitas" y "convergentes" se pueden hallar en los libros usuales de Cálculo diferencial.) En el artículo 2.7 se demostrará que las funciones trigonométricas de cualquier ángulo se pueden expresar mediante las funciones trigonométricas de un ángulo agudo positivo.

El sen θ se puede calcular con la serie infinita

$$\text{sen}\ \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots$$

en donde θ se expresa en radianes. (Los tres puntos al final indican que los términos que siguen se van formando de la misma manera.) El pro-

ducto de los enteros positivos de 1 a n se denomina *factorial* de n y se representa por $n!$ Así, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Cuando θ es pequeño, el valor de *sen* θ se calcula fácilmente a partir de esta serie. Para valores mayores de θ se pueden efectuar reducciones adecuadas.

Ejemplo 1. Calcule el valor de *sen* 0.2 con cuatro cifras decimales.

Solución: En la serie *sen* θ, sustituya $\theta = 0.2$. Resulta:

$$\text{sen } 0.2 = 0.2 - \frac{(0.2)^3}{3!} + \frac{(0.2)^5}{5!} - \frac{(0.2)^7}{7!} + \cdots$$

$$\text{sen } 0.2 = 0.20000 - \frac{0.00800}{6} + \frac{0.00032}{120} - \frac{0.0000128}{5040} + \cdots$$

$$\text{sen } 0.2 = 0.20000 - 0.00133 + 0.000003 - 0.000000002 + \cdots$$

Se ve que el cuarto sumando y los que le suceden no afectan a la cuarta cifra decimal; entonces basta sumar los tres primeros. Se obtiene

$$\textbf{sen } \mathbf{0.2 = 0.1987.}$$

Si se desea un número mayor de cifras decimales, se utilizan más términos de la serie. El cálculo se facilita mediante el empleo de calculadoras electrónicas.

Para muchos ángulos agudos positivos se han calculado (y dispuesto en tablas) los valores de sus funciones trigonométricas. En la tabla I, que se da al final de este libro, aparecen los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos del CI, expresados en grados y en radianes, a intervalos de 10′; los valores de sus funciones trigonométricas están calculados a cuatro cifras decimales.

Al usar la tabla I, note que los ángulos de 0° a 45° aparecen en la columna de la izquierda en tanto que los de 45° a 90° aparecen en la de la derecha. La validez de este arreglo se justificará en el capítulo 3 cuando se demuestre que las cofunciones de ángulos agudos complementarios son iguales; el valor de la función trigonométrica de un ángulo se halla en la misma línea que el ángulo. Si el ángulo aparece en la columna de la *izquierda* de la página, hay que buscar el nombre de la función trigonométrica en la parte *superior* de la página. Si el ángulo aparece en la columna de la *derecha*, los nombres de las funciones están al *pie* de la página. A continuación se dan algunos ejemplos acerca del uso de la tabla I.

Para determinar *sen* 27° 40′, se observa que el ángulo aparece en la columna de la *izquierda*. En consecuencia se busca la palabra *sen* en la parte *superior* y se encuentra $\textbf{sen } \mathbf{27° \, 40' = 0.4643.}$

Para determinar *tan* 1.0879 note que el ángulo (en radianes) aparece en la columna de la *derecha*. En consecuencia busque *tan* en la parte *inferior* para hallar $\textbf{tan } \mathbf{1.0879 = 1.907.}$

Para conocer el ángulo del CI que corresponde a una función trigonométrica dada, se invierte el proceso; así, para encontrar θ, dada *cot* $\theta = 0.5169$, busque en la columna *cot* θ hasta encontrar el número 0.5169.

Como *cot* θ está en la parte inferior de la columna, el ángulo se lee a la derecha: $\theta = \mathbf{62° 40' = 1.0937}$ **radianes.**

Si el ángulo que se busca, o la función trigonométrica deseada, no aparecen en la tabla, se determinan entonces mediante el procedimiento denominado *interpolación lineal,* el cual supone que si un ángulo queda entre dos de la tabla, entonces sus funciones trigonométricas están a distancias proporcionales de las funciones trigonométricas correspondientes.

El método se ilustra en los ejemplos que siguen. Note que interpolación no va a dar mayor aproximación que la que proporciona la tabla.

Ejemplo 2. Halle sen 27° 37′.

Solución: 27° 37′ está entre 27° 30′ y 27° 40′, y sen 27° 37′ entre sen 27° 30′ y sen 27° 40′. Para efectuar la interpolación haga el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{cccc} & \theta & \operatorname{sen}\theta & \\ 10 & \left[\begin{array}{cc} 7[& \begin{array}{c}27°30'\\ 27°37'\\ 27°40'\end{array} \end{array}\right. & \begin{array}{c}0.4617\\ \\ 0.4643\end{array} & \left.\begin{array}{c}]x\\ \\ \end{array}\right] 26. \end{array}$$

Como 27°37′ está a $\frac{7}{10}$ de la distancia de 27°30′ a 27°40′, sen 27°37′ debe estar en la misma proporción entre 0.4617 y 0.4643.

La diferencia entre los dos valores, 0.4617 y 0.4643, en este caso 0.0026, se denomina *diferencia tabular.* Por comodidad, la diferencia tabular se escribe usualmente como número entero, suprimiendo el punto decimal y los ceros que le siguen inmediatamente.

Forme entonces la proporción $7/10 = x/26$ para obtener

$$\boldsymbol{x = 18.2.}$$

Como la interpolación no puede dar una exactitud mayor que la dada en las tablas, redondee el valor de x al entero más próximo, esto es, $\boldsymbol{x = 18}$; añada ahora este valor a 0.4617 y obtenga como resultado **sen 27°37′ = 0.4635.**

Nota: El valor de x se suma o se resta del número a partir del cual se mide x, para que el resultado final quede entre los dos valores de la tabla.

Ejemplo 3. Halle cot 62°14′.

Solución: 62°14′ está entre 62°10′ y 62°20′; haga entonces el diagrama

$$\begin{array}{cccc} & \theta & \cot\theta & \\ 10 & \left[\begin{array}{cc} 4[& \begin{array}{c}62°10'\\ 62°14'\\ 62°20'\end{array} \end{array}\right. & \begin{array}{c}0.5280\\ \\ 0.5243\end{array} & \left.\begin{array}{c}]x\\ \\ \end{array}\right] 37. \end{array}$$

y forme la proporción

$$\frac{4}{10} = \frac{x}{37},$$

de donde

$$x = 14.8 = 15.$$

Para que el resultado quede entre las dos anotaciones tabulares, reste $x = 15$ de 0.5280.

$$\textbf{cot } \mathbf{62°14'} = \mathbf{0.5265.}$$

Ejemplo 4. Si csc $\theta = 2.716$, halle θ siendo éste un ángulo agudo positivo.

Solución: Forme el diagrama

$$\begin{array}{rcc} & \theta & \csc\theta \\ & 21°30' & 2.729 \\ 10 & x & 2.716 \;\; 13 \\ & 21°40' & 2.709 \end{array} 20,$$

de donde

$$\frac{x}{10} = \frac{13}{20}$$

y

$$x = 6.5 = 6$$

(Cuando el número por redondear termina en 5, es usual aproximarlo al número par más próximo)

Sume 6 a 21° 30′; resulta

$$\theta = \mathbf{21°36'.}$$

Para hallar el valor de una función trigonométrica de un ángulo expresado en radianes, es mejor usar la tabla II.

Sin embargo para practicar el uso de la tabla I y la interpolación lineal, en los ejercicios 2.6 use solamente la tabla I. La tabla II se usará en el capítulo 4.

Ejemplo 5. Halle cos 0.4761, usando la tabla I.

Solución: Forme el diagrama

$$\begin{array}{rcc} & \theta & \cos\theta \\ & 0.4741 & 0.8897 \\ 30 & 20 \;\; 0.4761 & x \\ & 0.4771 & 0.8884 \end{array} 13.$$

de donde

$$\frac{20}{30} = \frac{x}{13}$$

y

$$x = 8.7 = 9$$

así,

$$\textbf{cos } \mathbf{0.4761} = \mathbf{0.8888.}$$

Cuando se desea mayor exactitud se emplean tablas con mayor número de cifras decimales. En tal caso el procedimiento de interpolación es el mismo que el descrito para tablas de cuatro cifras decimales.

EJERCICIOS 2.6

1. Use la serie infinita $\operatorname{sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots$, para calcular *sen* θ con cuatro cifras decimales: *a)* 0.05; *b)* 0.1; *c)* 0.2; *d)* 0.5; *e)* 3°; *f)* 5° y *g)* 30°.

2. Usando la serie infinita $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \ldots$, calcule *cos* θ con cuatro cifras decimales para los valores de θ dados en el problema 1.

3. Usando la tabla I, halle los valores de las funciones trigonométricas que siguen:

a) sen 6°20′. *b)* sen 0.7738. *c)* cos 50°20′.
d) cos 0.7941. *e)* tan 1.0065. *f)* tan 28°20′.
g) cot 28°30′. *h)* cot 1.3265. *i)* sec 0.0524.
j) sec 45°50′. *k)* csc 33°50′. *l)* csc 1.2595.

4. Halle el valor de θ, si θ es agudo y positivo.

a) sen $\theta = 0.1334$. *b)* cos $\theta = 0.9993$. *c)* tan $\theta = 1.580$.
d) cot $\theta = 0.5930$. *e)* sec $\theta = 1.084$. *f)* csc $\theta = 1.255$.

5. Halle el valor de θ en radianes, si θ es agudo y positivo.

a) sen $\theta = 0.9426$. *b)* cos $\theta = 0.4950$. *c)* tan $\theta = 0.4592$.
d) cot $\theta = 1.590$. *e)* sec $\theta = 1.299$. *f)* csc $\theta = 2.337$.

6. Halle por interpolación los valores de las funciones trigonométricas que se indican:

a) scn 32°32′. *b)* sen 49°43′. *c)* cos 28°36′.
d) cos 69°19′. *e)* tan 32°45′. *f)* tan 75°08′.
g) cot 60°11′. *h)* cot 2°44′. *i)* sec 70°46′.
j) csc 29°29′. *k)* sen 0.8763. *l)* cos 1.3162.
m) tan 0.1373. *n)* cot 0.8268. *o)* sec 0.2143.
p) csc 1.0000.

7. Halle el valor de θ en grados y minutos, si θ es agudo y positivo.

a) sen $\theta = 0.0866$. *b)* sen $\theta = 0.7349$. *c)* cos $\theta = 0.7438$.
d) cos $\theta = 0.2825$. *e)* tan $\theta = 0.3200$. *f)* tan $\theta = 1.371$.
g) cot $\theta = 2.767$. *h)* cot $\theta = 0.9467$. *i)* sec $\theta = 1.193$.
j) sec $\theta = 1.482$. *k)* csc $\theta = 2.283$. *l)* cs. $\theta = 1.383$.

8. Halle el valor de θ en radianes, si θ es agudo y positivo (úsese la tabla I).

a) sen $\theta = 0.1346$. *b)* sen $\theta = 0.9167$. *c)* cos $\theta = 0.2556$.
d) cos $\theta = 0.9773$. *e)* tan $\theta = 0.4154$. *f)* tan $\theta = 1.593$.
g) cot $\theta = 5.802$. *h)* cot $\theta = 0.8176$. *i)* sec $\theta = 1.073$.
j) sec $\theta = 1.778$. *k)* csc $\theta = 1.303$. *l)* csc $\theta = 2.198$.

9. ¿Qué ocurre al comparar sen θ y θ, cuando θ se mide en radianes y su valor tiende a cero?

10. ¿Qué puede usted decir acerca de los resultados del método de interpolación lineal, aplicado a la función tangente de ángulos próximos a 90°?

11. Dada $T(\theta) = 0.1305$, halle el conjunto de valores de θ $(0° \leqslant \theta \leqslant 90°)$ para el cual existe alguna función trigonométrica que tiene el valor numérico dado.

12. Mismo problema para $T(\theta) = 1.709$.

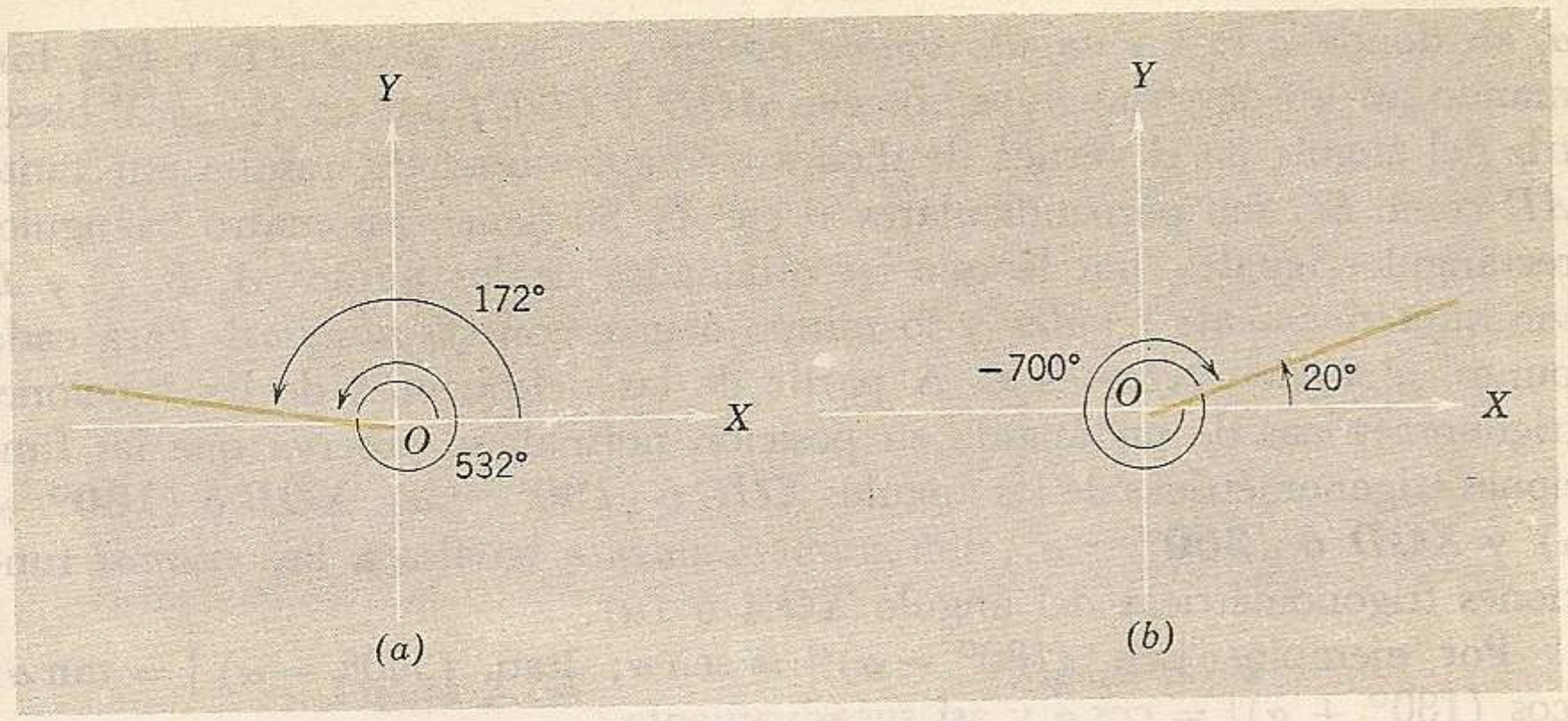


Figura 2.7-1

2.7. VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO CUALQUIERA

Un ángulo en posición normal, mayor que 360°, es coterminal con un ángulo *no negativo* menor que 360°. Un ángulo negativo, en posición normal, es coterminal con un ángulo *no negativo* menor que 360°; por ejemplo, 532° es coterminal con 172° y −700° es coterminal con 20°. Vea la figura 2.7-1.

Como los ángulos coterminales tienen los mismos valores para sus funciones trigonométricas, sólo es necesario considerar el problema de hallar los valores de las funciones trigonométricas de ángulos no negativos menores que 360°.

Trace una circunferencia de radio r con centro en el origen (figura 2.7-2) y dos diámetros AB y CD que formen con el eje X ángulos iguales

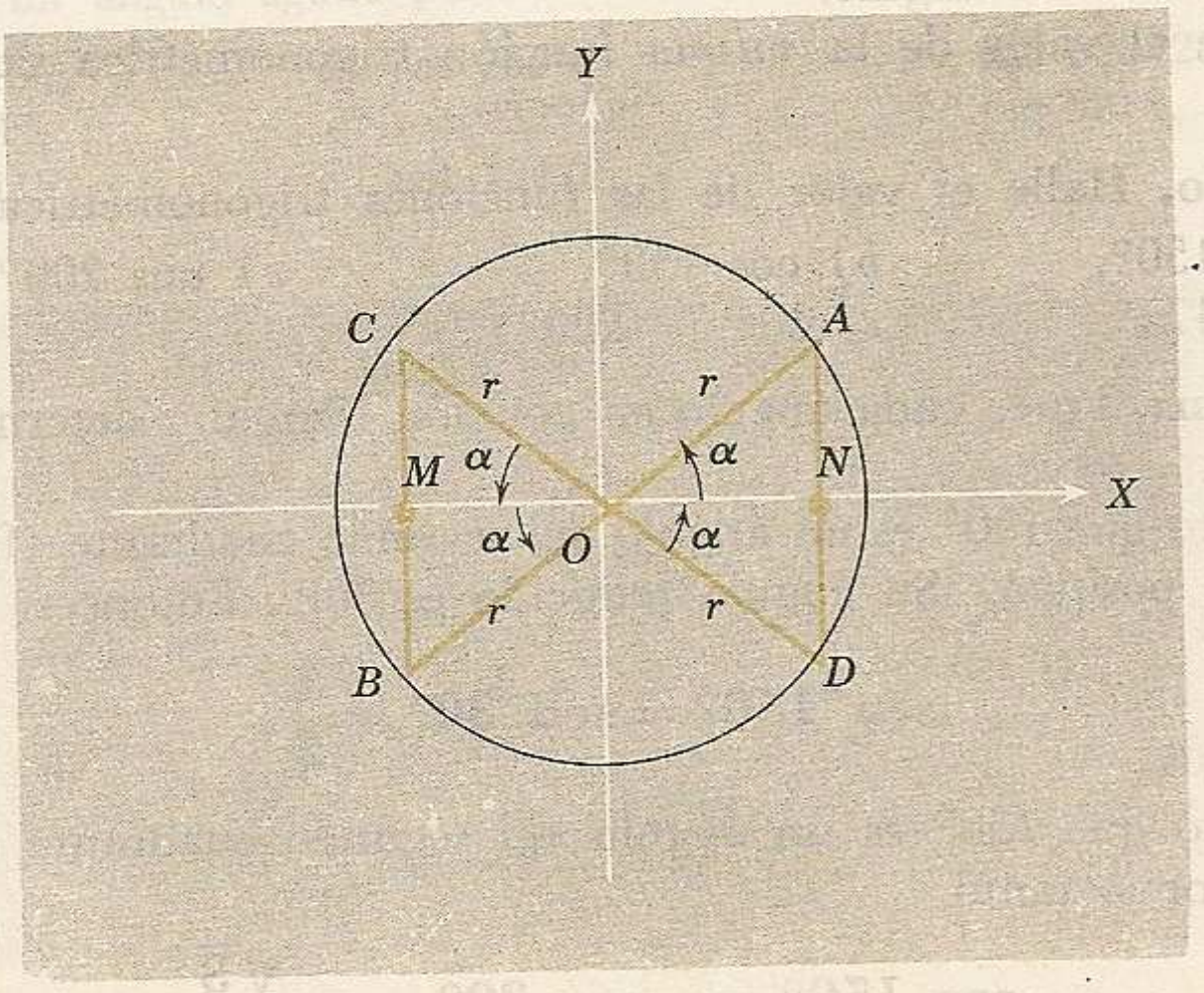


Figura 2.7-2

α, en donde α es un *ángulo agudo positivo*. Trace ahora AD y BC, formando así los dos triángulos isósceles AOD y BOC; por ser el eje X bisectriz del ángulo en el vértice de dichos triángulos isósceles, resulta que tanto AD como BC son perpendiculares al eje X. Se tienen así cuatro triángulos rectángulos iguales, por lo que las ordenadas de los puntos A, B, C y D son *numéricamente iguales*, y lo mismo ocurre con sus *abscisas*. Para cada punto, el *radio vector* es r. A partir de las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal, se observa que las funciones trigonométricas de los ángulos $\boldsymbol{XOC}$ ó $(\mathbf{180^\circ} - \alpha)$, $\boldsymbol{XOB}$ ó $(\mathbf{180^\circ} + \alpha)$ y $\boldsymbol{XOD}$ ó $(\mathbf{360^\circ} - \alpha)$, son *numéricamente* iguales a las *mismas* funciones trigonométricas del ángulo $\boldsymbol{XOA}$ ó (α).

Por ejemplo, $|\text{sen } (180^\circ - \alpha)| = \text{sen } \alpha$; $|\tan (360^\circ - \alpha)| = \tan \alpha$; $|\cos (180^\circ + \alpha)| = \cos \alpha$ y así sucesivamente.

Haciendo uso de la notación funcional, se puede escribir $|\boldsymbol{T}(\theta)| = \boldsymbol{T}(\alpha)$, donde θ es un ángulo cualquiera en posición normal y α es su ángulo reducido al primer cuadrante.

Definición 2.7-1: *Se llama ángulo reducido de un ángulo dado, el ángulo agudo positivo que forma el lado terminal del ángulo dado con el eje X. Para múltiplos pares de* $\frac{\pi}{2}$, *el ángulo reducido es* 0° *y para múltiplos impares,* 90°.

El signo algebraico de las funciones trigonométricas del ángulo dado, está determinado por el cuadrante en que queda su lado terminal.

Para hallar las funciones trigonométricas de un ángulo use la siguiente

Regla de reducción

1. Trace el ángulo dado en posición normal y determine el ángulo reducido.
2. Determine el signo a partir de la función trigonométrica solicitada y del cuadrante del ángulo.
3. Halle el valor de la *misma* función trigonométrica del ángulo reducido.

Ejemplo. Halle el valor de las funciones trigonométricas siguientes:

a) sen 150°. *b)* cos 150°. *c)* tan 200°.
d) cot 475°. *e)* sen (-220°).

Solución: Trace cada ángulo en posición normal y determine el ángulo reducido.

a) Puesto que 150° es un ángulo del segundo cuadrante (figura 2.7-3), sen 150° es positivo. Su ángulo reducido es 30°. Entonces

$$\textbf{sen } \mathbf{150^\circ} = \textbf{sen } \mathbf{30^\circ} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.$$

b) Puesto que 150° es un ángulo del segundo cuadrante, cos 150° es negativo. Por lo tanto,

$$\textbf{cos } \mathbf{150^\circ} = -\textbf{cos } \mathbf{30^\circ} = -\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}.$$

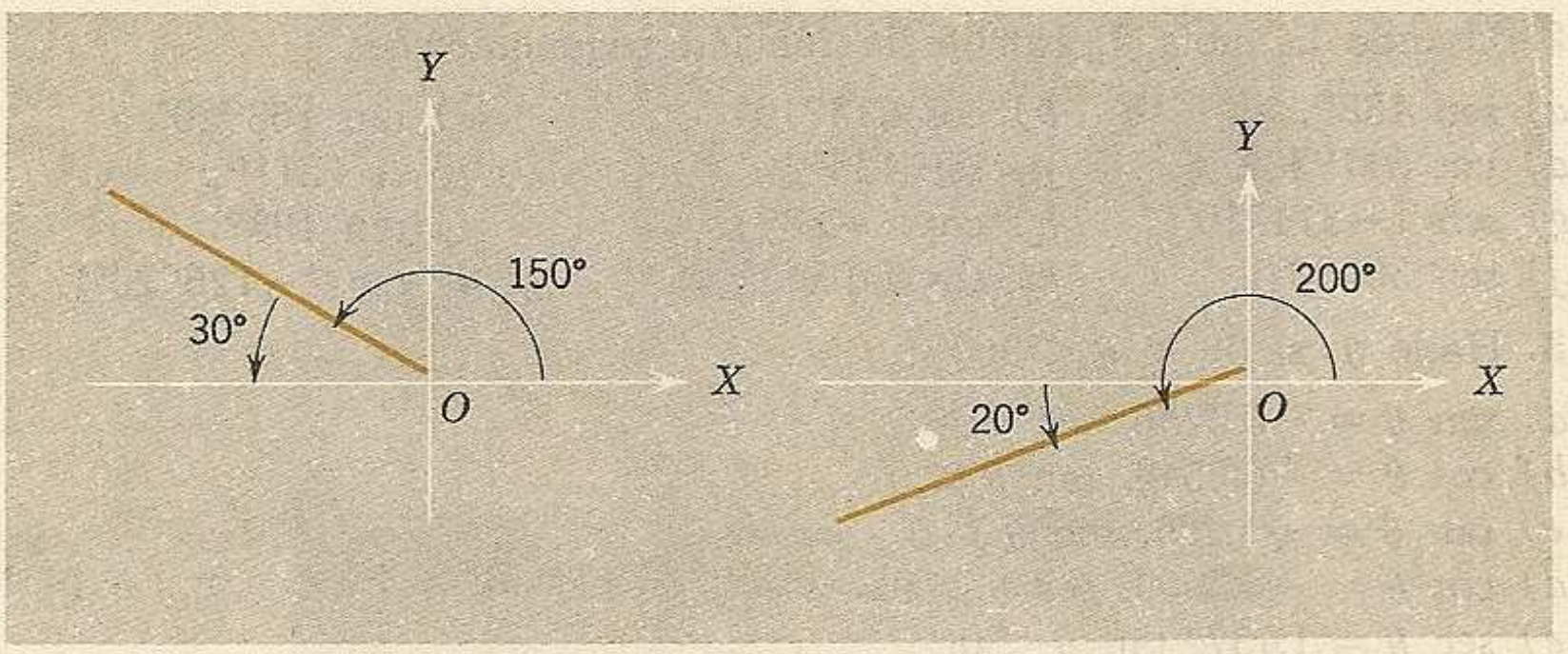


Figura 2.7-3

Figura 2.7-4

c) El ángulo reducido es 20° (figura 2.7-4); la tangente de un ángulo del tercer cuadrante es positiva:

$$\tan 200° = \tan 20° = 0.3640.$$

d) El ángulo reducido es 65° (figura 2.7-5); la cotangente de un ángulo del segundo cuadrante es negativa:

$$\cot 475° = \cot 115° = -\cot 65° = -0.4663.$$

e) El ángulo reducido es 40° (figura 2.7-6); el cuadrante es el segundo:

$$\operatorname{sen}(-220°) = \operatorname{sen} 40° = 0.6428.$$

EJERCICIOS 2.7

1. Exprese las funciones trigonométricas dadas, en términos de las mismas funciones de un ángulo agudo positivo.

a) sen 115°. *b)* cos 235°. *c)* tan 325°28′.
d) cot 98°. *e)* sec 232°58′. *f)* csc 321°.
g) sen 511°. *h)* cot 1542°.

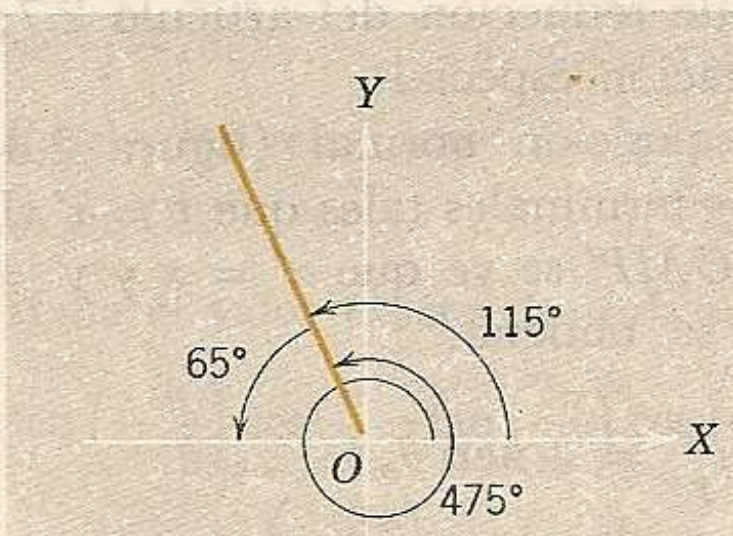


Figura 2.7-5

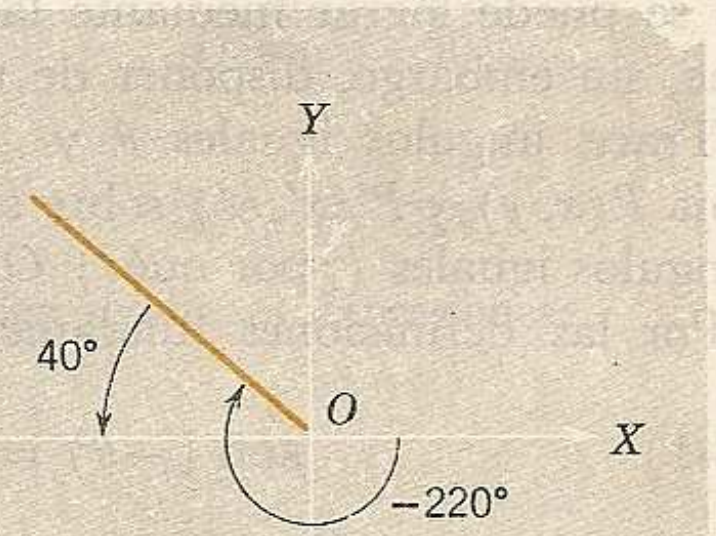


Figura 2.7-6

2. Usando la tabla I, calcule la función trigonométrica.

a) sen 138°. *b)* cos 213°10′. *c)* tan 168°20′.
d) cot 317°30′. *e)* sec 135°10′. *f)* csc 211°.
g) sen (−314°10′). *h)* cos (−38°). *i)* tan 188°.
j) sen 305°07′. *k)* cos 110°11′. *l)* csc (−126°20′).

3. Halle θ, si $0° \leq \theta < 360°$:

a) sen $\theta = -0.3256$, sec $\theta > 0$.
b) cos $\theta = -0.8542$, tan $\theta < 0$.
c) tan $\theta = -1.289$, sen $\theta > 0$.
d) cot $\theta = -0.5509$, sec $\theta > 0$.
e) sec $\theta = 1.137$, tan $\theta < 0$.
f) csc $\theta = 1.640$, sec $\theta < 0$.
g) sen $\theta = 0.6258$. *h)* cos $\theta = -0.6258$.
i) tan $\theta = 0.7500$. *j)* cot $\theta = -0.5509$.
k) sec $\theta = 1.317$. *l)* csc $\theta = -1.021$.

4. Complete la tabla con el valor exacto de la función trigonométrica.

θ	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen θ												
cos θ												
tan θ												
cot θ												
sec θ												
csc θ												

5. Usando radianes para expresar el valor de θ, construya una tabla análoga a la del problema 4.

6. Dada $T(\theta) = -0.5075$, halle el conjunto de valores de α, el ángulo reducido al primer cuadrante, para todo θ tal que $0° \leqslant \theta \leqslant 360°$, para el cual existe alguna función trigonométrica que tiene el valor numérico dado.

7. Mismo problema para $T(\theta) = 2.000$.

2.8. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE $(-\theta)$

La determinación de las funciones trigonométricas de un ángulo negativo se puede lograr mediante la regla de reducción del artículo 2.7; conviene, sin embargo, disponer de una relación especial:

Trace ángulos iguales θ y $-\theta$ en posición normal (figura 2.8-1) y escoja $P(x, y)$ y $P'(x', y')$ sobre sus lados terminales tales que $r = r'$. De los triángulos iguales (¿por qué?) OMP y OMP' se ve que $x' = x$ y $y' = -y$.

Por las definiciones fundamentales, se obtiene:

$$\text{(2.8-1)} \qquad \textbf{sen}\ (-\theta) = \frac{y'}{r'} = \frac{-y}{r} = -\textbf{sen}\ \theta,$$

$$\textbf{cos}\ (-\theta) = \frac{x'}{r'} = \frac{x}{r} = \textbf{cos}\ \theta,$$

$$\textbf{tan}\ (-\theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{-y}{x} = -\textbf{tan}\ \theta,$$

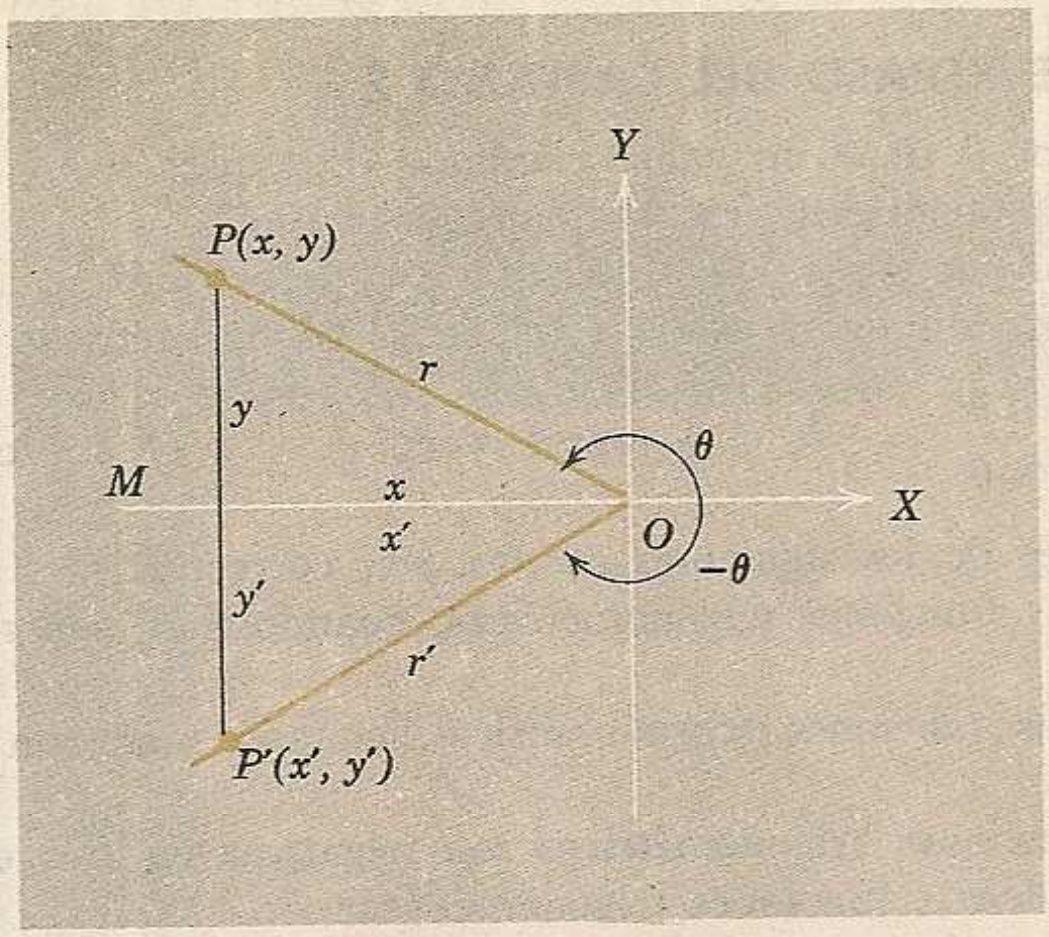


Figura 2.8-1

(2.8-1)
$$\cot(-\theta) = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{-y} = -\cot\theta,$$

$$\sec(-\theta) = \frac{r'}{x'} = \frac{r}{x} = \sec\theta,$$

$$\csc(-\theta) = \frac{r'}{y'} = \frac{r}{y} = -\csc\theta.$$

Ejemplos:

$$\operatorname{sen}(-50°) = -\operatorname{sen} 50°.$$

$$\tan(-160°) = -\tan 160° = -(-\tan 20°) = \tan 20°.$$

EJERCICIOS 2.8

1. Halle los valores de las funciones trigonométricas siguientes:

a) sen $(-32°)$. *b)* cos $(-47°30')$. *c)* tan $(-116°)$.
d) sen $(-215°)$. *e)* cos $(-121°17')$. *f)* tan $(-355°)$.
g) sec $(-242°)$. *h)* csc $(-313°)$. *i)* sen (-30).

2. Pruebe las relaciones (2.8-1) para

a) θ en CI. *b)* θ en CIII. *c)* θ en CIV.

3. Halle el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos^2\frac{\pi}{4} - \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cot\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

b) $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\csc\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\cos(-\pi)$.

4. Diga si $\operatorname{sen}^2(-30°) + \cos^2(30°) = 1$.

5. Establezca cuáles de las funciones trigonométricas son pares y cuáles impares; vea los problemas 1.7-11 y 1.7-12.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 2

1. Diga si cot θ tiene un valor máximo. ¿Por qué?

2. *a)* Diga si puede ser cos $\theta < -1$. ¿Por qué?

b) Diga si puede ser $-1 < \sec \theta < 1$. ¿Por qué?

3. Usando las definiciones de las funciones trigonométricas muestre que

a) $\tan \theta = \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$ *b)* $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$. *c)* $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$.

4. Diga cuáles de los siguientes asertos, son correctos:

a) Dos de las funciones trigonométricas, cuando más, son negativas en cualquier cuadrante.

b) Dos de las funciones trigonométricas, cuando más, son simultáneamente nulas.

c) Cuatro funciones trigonométricas son negativas en tres cuadrantes.

5. Halle las demás funciones trigonométricas si:

a) $\tan \theta = \dfrac{3}{4}$, θ en CIII.

b) $\operatorname{sen} \theta = -\dfrac{12}{13}$, θ en CIV.

c) $\csc \theta = 0$.

6. Dibuje cada uno de los siguientes ángulos en posición normal y halle los valores exactos de sus funciones trigonométricas:

a) 135°. *b)* $-\dfrac{5\pi}{4}$. *c)* $-270°$.

7. Muestre, mediante el cálculo de su valor exacto, que cada una de las siguientes expresiones es cierta:

a) $\operatorname{sen}^2 (-30°) + \cos^2 (-30°) = 1$.

b) $1 + \cot^2 \left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = \csc^2 \left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

c) $\cos^2 \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}^2 \left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

8. Use la tabla I para hallar el valor de

a) sen 23°15′. *b)* cot 57°12′.
c) cos 126°40′. *d)* tan 300°25′.

9. *a)* Defina el ángulo reducido.

b) Establezca la regla de reducción.

10. Si α es el ángulo reducido de θ, muestre que $|T(\theta)| = |T(\alpha)|$.

CAPITULO 3

El triángulo rectángulo

3.1. INTRODUCCION

En este capítulo veremos algunas aplicaciones de la trigonometría que implican la resolución de un triángulo rectángulo. Un triángulo tiene seis elementos: tres lados y tres ángulos y resolver un triángulo consiste en calcular tres de los elementos cuando se conocen los otros tres, siempre que uno de ellos sea un lado.

A menos que se indique lo contrario, los ángulos de un triángulo rectángulo serán designados por A, B y C, siendo C el ángulo recto. Los lados opuestos a los ángulos se representarán por a, b y c, respectivamente. La suma de los ángulos agudos es igual a 90°, y cada uno es el *complemento* del otro.

La figura 3.1-1 muestra un triángulo rectángulo; el lado c recibe el nombre de hipotenusa, el lado a es el cateto opuesto al ángulo A, y el lado b es el cateto adyacente al ángulo A.

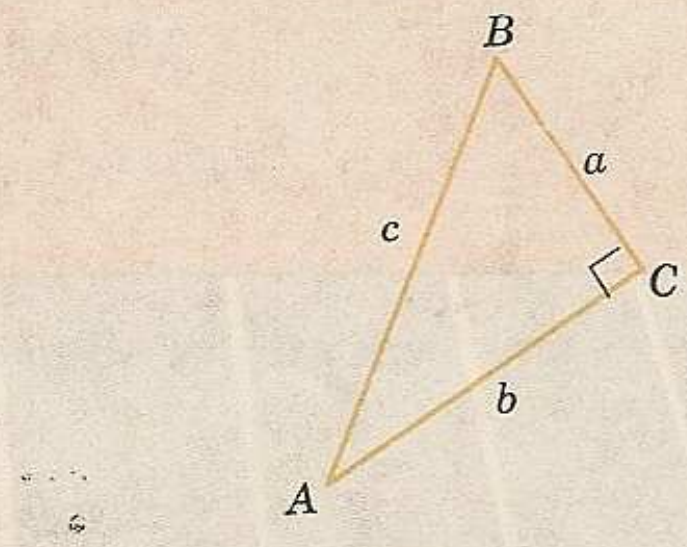


Figura 3.1-1

3.2. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO DE UN TRIANGULO RECTANGULO

Si en el triángulo rectángulo ACB, el ángulo agudo A se coloca en posición normal (figura 3.2-1), entonces, a partir de las definiciones de las funciones trigonométricas, se tiene:

$$\text{sen } A = \frac{y}{r} = \frac{a}{c} \text{ ó } \textbf{sen (áng. agudo)} = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{hipotenusa}}.$$

co / hip

Se toma una "coca" y se le dan 2 traguitos, y hay que repetir 2 veces; todo en el numerador:

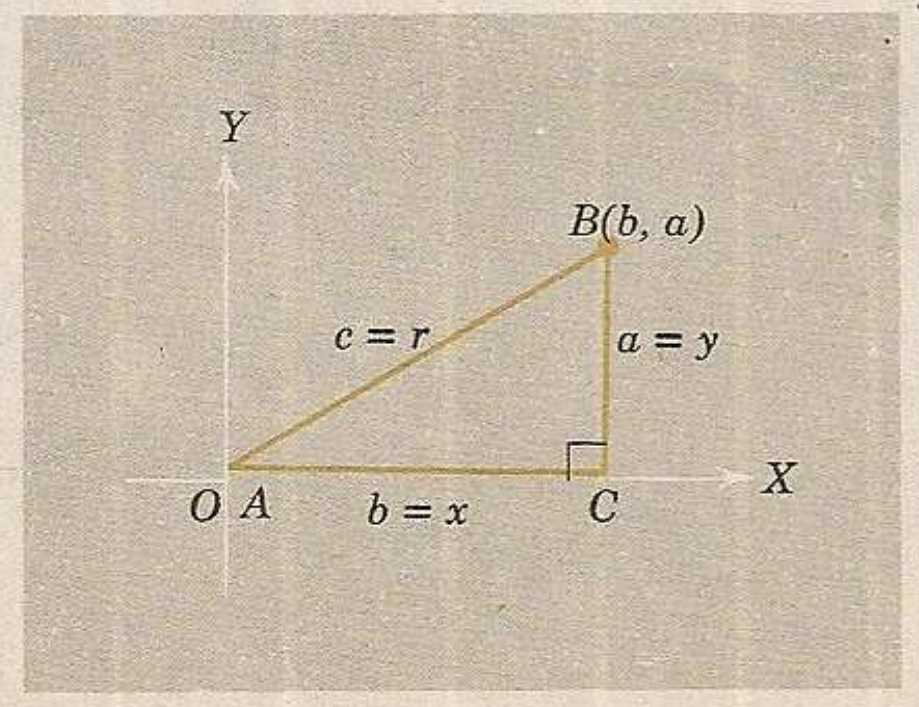


Figura 3.2-1

V co / CA / co / CA / hip / hip

Como quedó la mitad ahora se hace lo mismo pero de abajo hacia arriba, en los denominadores.

$$\cos A = \frac{x}{r} = \frac{b}{c} \text{ ó } \textbf{cos (áng. agudo)} = \frac{\textbf{cateto adyacente}}{\textbf{hipotenusa}}. \quad \frac{CA}{hip}$$

$$\tan A = \frac{y}{x} = \frac{a}{b} \text{ ó } \textbf{tan (áng. agudo)} = \frac{\textbf{cateto opuesto}}{\textbf{cateto adyacente}}. \quad \frac{CO}{CA}$$

$$\cot A = \frac{x}{y} = \frac{b}{a} \text{ ó } \textbf{cot (áng. agudo)} = \frac{\textbf{cateto adyacente}}{\textbf{cateto opuesto}} \quad \frac{CA}{CO}$$

$$\sec A = \frac{r}{x} = \frac{c}{b} \text{ ó } \textbf{sec (áng. agudo)} = \frac{\textbf{hipotenusa}}{\textbf{cateto adyacente}}. \quad \frac{hip}{CA}$$

$$\csc A = \frac{r}{y} = \frac{c}{a} \text{ ó } \textbf{csc (áng. agudo)} = \frac{\textbf{hipotenusa}}{\textbf{cateto opuesto}}. \quad \frac{hip}{CO}$$

Las relaciones anteriores se conocen como las definiciones de las funciones trigonométricas de un *ángulo agudo de un triángulo rectángulo.*

Si se coloca ahora el ángulo B en posición normal (figura 3.2-2), se tiene:

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}. \qquad \cos B = \frac{a}{c}. \qquad \tan B = \frac{b}{a}.$$

$$\csc B = \frac{c}{b}. \qquad \sec B = \frac{c}{a}. \qquad \cot B = \frac{a}{b}.$$

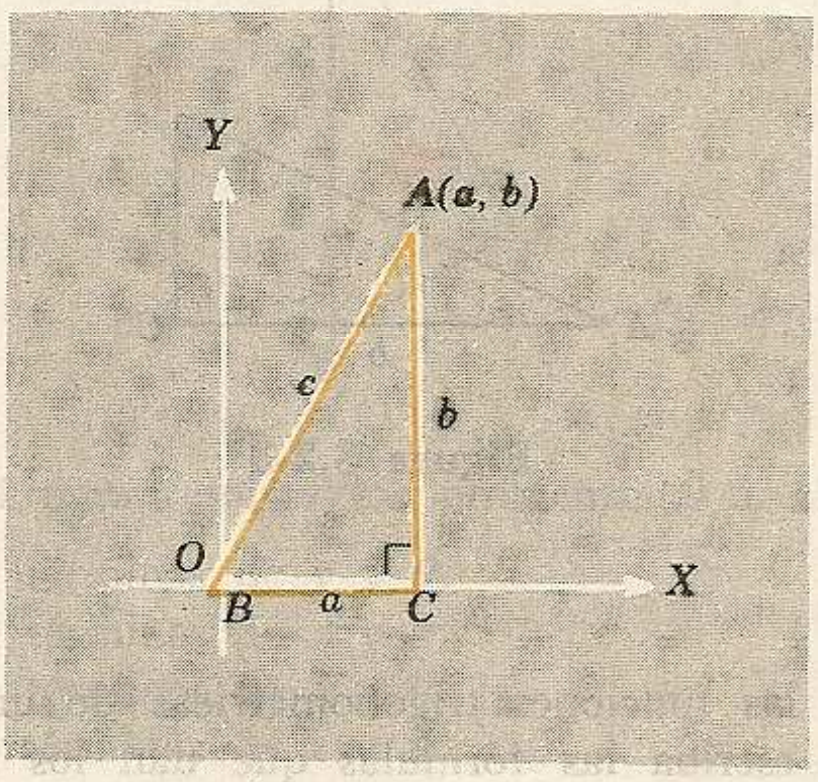


Figura 3.2-2

Comparando las funciones trigonométricas de A con las de B, se tiene.

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c} = \cos A. \qquad \csc B = \frac{c}{b} = \sec A.$$

$$\cos B = \frac{a}{c} = \operatorname{sen} A. \qquad \sec B = \frac{c}{a} = \csc A.$$

$$\tan B = \frac{b}{a} = \cot A. \qquad \cot B = \frac{a}{b} = \tan A.$$

Como A y B son complementarios,[1] se concluye que las *cofunciones de ángulos agudos complementarios son iguales.* En general, *ángulos complementarios* son aquellos cuya suma es igual a 90°; por ejemplo, los ángulos 200° y $-110°$ son complementarios. En el capítulo 7 se demostrará que las cofunciones de cualquier par de ángulos complementarios son iguales. Esta es la razón por la cual al construir las tablas de las funciones trigonométricas sólo es necesario considerar ángulos comprendidos entre 0° y 45°.

El estudiante debe familiarizarse con las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, a fin de escribir rápidamente las funciones que relacionan entre sí tres partes cualesquiera de un triángulo rectángulo.

Ejemplo. En el triángulo rectángulo ACB (figura 3.2-3), halle a en términos de B y c.

Solución:

$$\cos B = \frac{a}{c},$$

de donde

$$a = c \cos B.$$

El estudiante debe tratar de obtener esta respuesta sin escribir el primer paso.

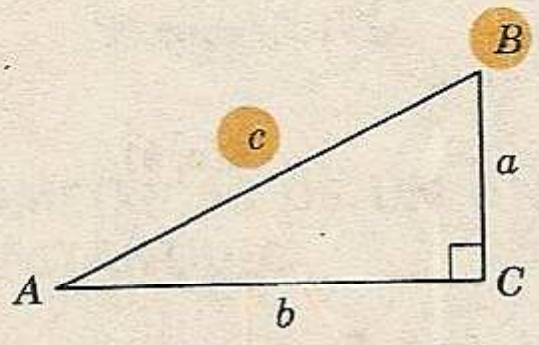
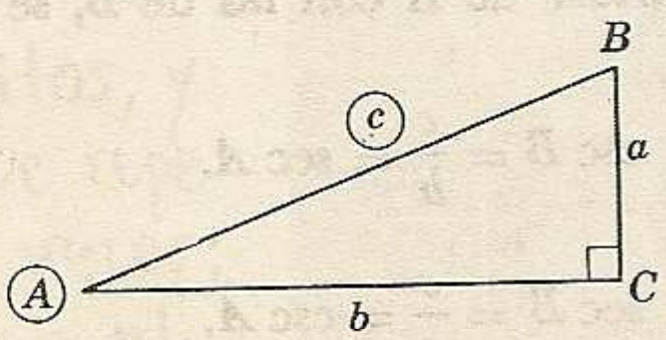


Figura 3.2-3

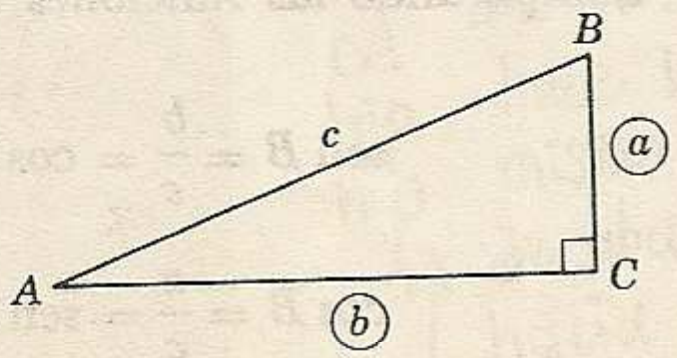
EJERCICIOS 3.2

Haciendo uso de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, escriba las fórmulas que dan los elementos desconocidos de los siguientes triángulos rectángulos, en términos de los datos que aparecen dentro de un círculo.

1.

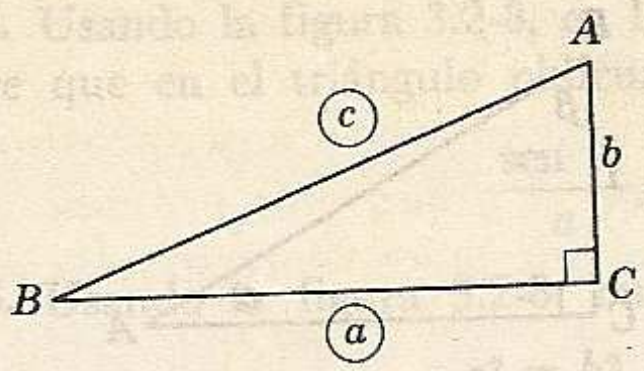


2.

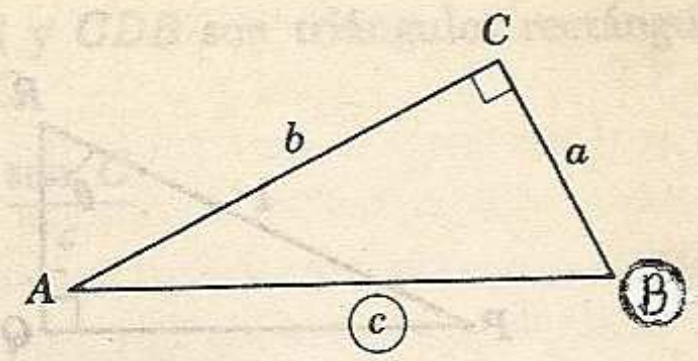


[1] Como B es el *complemento* de A, sen B = sen del complemento de A = cos A. Por ello, la abreviatura cos A recibe algunas veces el nombre de seno del complemento de A.

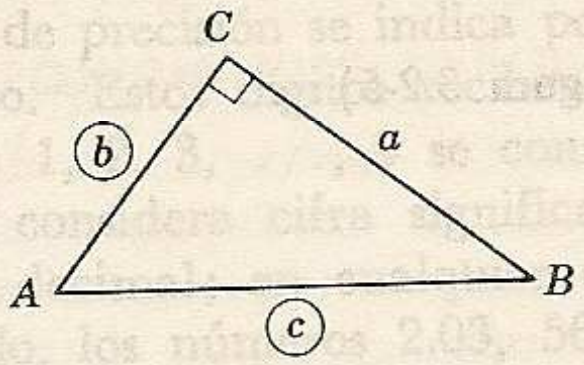
3.



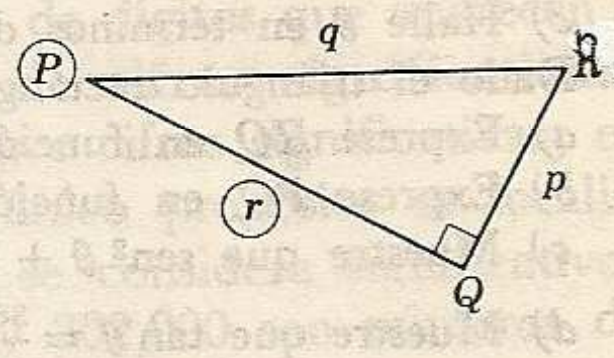
4.



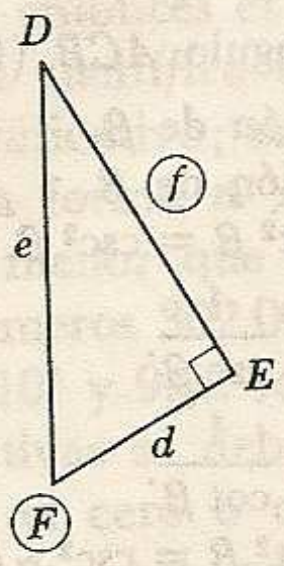
5.



6.



7.



Use la figura 3.2-4 para resolver los problemas 8 a 11.

8. *a)* Halle x en términos de y y θ.
b) Halle x en términos de z y θ.

9. *a)* Halle y en términos de z y θ.
b) Halle y en términos de x y θ.

10. *a)* Halle z en términos de x y θ.
b) Halle z en términos de y y θ.

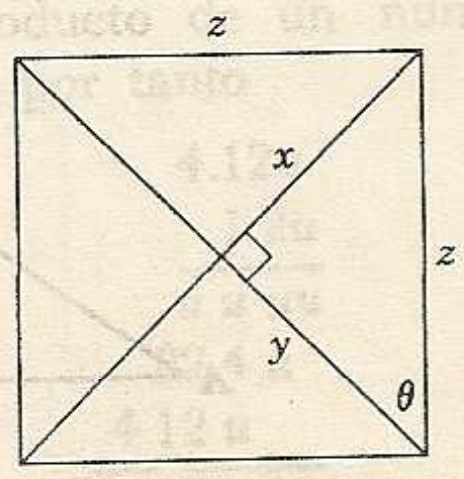


Figura 3.2-4

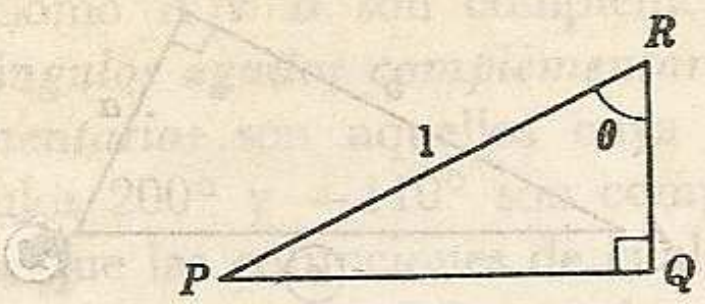


Figura 3.2-5

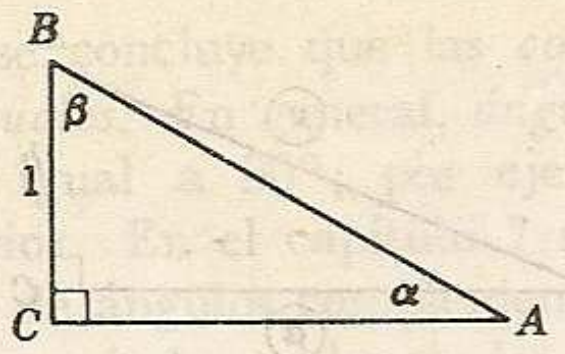


Figura 3.2-6

11. *a)* Halle θ en términos de x y y.
b) Halle θ en términos de x y z.
c) Halle θ en términos de y y z.

12. Dado el triángulo rectángulo PQR (figura 3.2-5):
a) Exprese RQ en función de θ.
b) Exprese PQ en función de θ.
c) Muestre que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.
d) Muestre que $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.
e) Muestre que $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$.
f) Muestre que $\csc\theta = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}$.

13. Dado el triángulo rectángulo ACB (figura 3.2-6):
a) Exprese AC en función de β.
b) Exprese AB en función de β.
c) Muestre que $1 + \cot^2\beta = \csc^2\beta$.
d) Muestre que $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{1}{\csc\beta}$.
e) Muestre que $\cot\alpha = \dfrac{1}{\cot\beta}$.
f) Muestre que $1 + \cot^2\beta = \csc^2\alpha\cot^2\beta$.

14. Dado el triángulo rectángulo DEF (figura 3.2-7):
a) Exprese ED en función de x.
b) Exprese FD en función de x.
c) Muestre que $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$.
d) Muestre que $\operatorname{sen} x = \dfrac{\tan x}{\sec x}$.
e) Muestre que $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

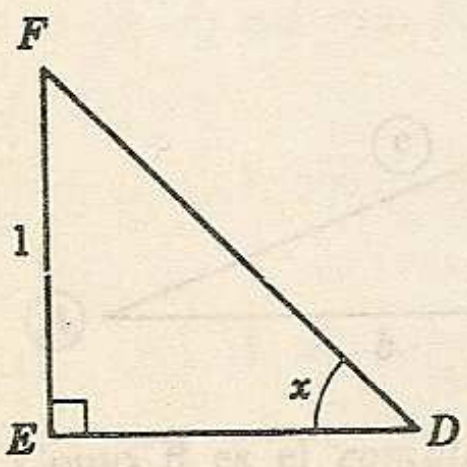


Figura 3.2-7

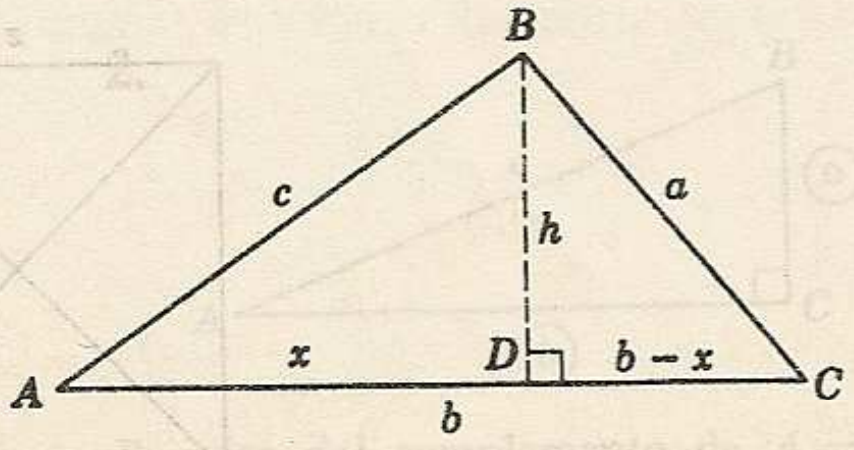


Figura 3.2-8

15. Usando la figura 3.2-8, en la que ADB y CDB son triángulos rectángulos, muestre que en el triángulo oblicuángulo ABC

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}.$$

16. Usando la figura 3.2-8, muestre que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

3.3. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

La precisión de los datos obtenidos en una medición, depende de las características del instrumento empleado para hacerla. Normalmente, el grado de precisión se indica por el número de dígitos que aparecen en un número. Estos dígitos reciben el nombre de **cifras significativas.** Los dígitos 1, 2, 3, . . ., 9 se consideran siempre cifras significativas; el cero no se considera cifra significativa si su único propósito es localizar el punto decimal; en cualquier otro caso sí se considera significativo. Por ejemplo, los números 2.03, 567, 0.00962 y 302,000 son números de tres cifras significativas.

En ciertos casos, el cero al final de un número puede o no ser significativo. Para saberlo con certeza, se requiere cierta información adicional, como, por ejemplo, la forma en que se realizó la medición. Si decimos que una distancia d es de 30 m, entonces el cero es significativo si $29.5 < d < 30.5$. El uso de la *notación científica* de los números, permite saber en qué casos el cero final es significativo; en dicha notación el número se escribe como un producto de la forma $\boldsymbol{n \times 10^k}$, en donde $\boldsymbol{1 \leqq n < 10}$ ($\boldsymbol{n}$ igual o mayor que 1, pero menor que 10), y $\boldsymbol{k}$ es un **entero.** Por ejemplo, para indicar que los números 302,000 y 0.00962 poseen tres cifras significativas se escriben 3.02×10^5 y 9.62×10^{-3}; en cambio, para indicar que poseen cinco cifras significativas se deben escribir como 3.0200×10^5 y 9.6200×10^{-3}. En este libro, el cero o ceros finales de un número se considerarán siempre significativos, para números no escritos en notación "científica".

Una regla de cálculo de 25 cm se puede usar sólo para operaciones con números de no más de tres cifras significativas; cuando se desea mayor exactitud, es mejor utilizar logaritmos.

En general, la exactitud en el resultado de un cálculo aritmético no puede ser mayor que la del número menos exacto que interviene en la operación. Considere, por ejemplo, el producto de los números aproximados 4.12 y 1.2; en cada número se desconoce el dígito siguiente, que se representará por u. El producto de un número por otro desconocido es, igualmente, desconocido; por tanto

$$\begin{array}{r} 4.12u \\ 1.2u \\ \hline u\ u\ uu \\ 82\ 4\ u \\ 4\ 12\ u \\ \hline 4.9u\ u\ uu \end{array}$$

o sea que la respuesta contiene únicamente dos cifras significativas, a saber, 4.9.

En la resolución de triángulos podemos considerar que una aproximación de *una o dos cifras* en los lados, corresponde al *grado más próximo* en los ángulos; una de *tres cifras* significativas en los lados, corresponde al *minuto más próximo* en los ángulos y que una de cinco cifras significativas en los lados corresponde al *décimo de minuto* más próximo en los ángulos.

Como ejercicio, el estudiante debe escribir en notación científica los números siguientes:

a) 125, *b)* 0.176, *c)* 0.0003070, *d)* 7060.23.

3.4-A. RESOLUCION ARITMETICA DE TRIANGULOS RECTANGULOS

Para la resolución aritmética de un triángulo rectángulo se utilizan las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo, y los valores de las funciones trigonométricas que aparecen en la tabla I. El procedimiento consiste en trazar el triángulo aproximadamente a escala; encerrar en un círculo los elementos dados; escribir las expresiones trigonométricas que relacionan a *dos* de los elementos *conocidos* y a *uno* de los *desconocidos* y despejar la incógnita. El método se ilustra en los siguientes ejemplos. Como los valores dados en la tabla I para las funciones trigonométricas de los ángulos, están a cuatro cifras decimales, se usarán cuatro cifras en los pasos intermedios de los problemas y la respuesta se redondeará al número apropiado de cifras significativas, según lo expuesto en el artículo 3.3. Esto es, para tres o menos cifras significativas se usa la tabla I sin interpolación; para cuatro cifras significativas se usa la tabla I con interpolación al minuto más próximo. En caso de que se desee o necesite mayor exactitud se emplearán logaritmos u otras tablas.

Ejemplo 1. Resuelva el triángulo rectángulo ACB, si $c = 7.25$ y $A = 35°00'$.

Solución: Trace el triángulo (figura 3.4-1) y encierre los datos en círculos.

Puesto que $A + B = 90°$, entonces $\boldsymbol{B = 55°00'}$.

Una función trigonométrica que relaciona los dos elementos conocidos A y c, y la incógnita a, es

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c},$$

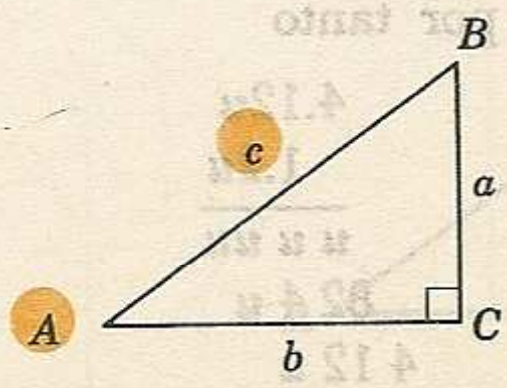


Figura 3.4-1

de donde

$$a = c \operatorname{sen} A.$$

La incógnita b y los datos aparecen en la relación

$$b = c \cos A.$$

Sustituya ahora c y A por sus valores para obtener

$$a = 7.25 \operatorname{sen} 35°00' \text{ y } b = 7.25 \cos 35°00'.$$

De la tabla I, sen 35°00′ = 0.5736, y cos 35°00′ = 0.8192. Así, $a = 7.25$ (0.5736), y $b = 7.25$ (0.8192), o bien, $\boldsymbol{a = 4.16}$ y $\boldsymbol{b = 5.94}$, redondeando a tres cifras significativas.

Ejemplo 2. Resuelva el triángulo rectángulo ACB, dados $a = 62.5$ y $b = 36.4$.

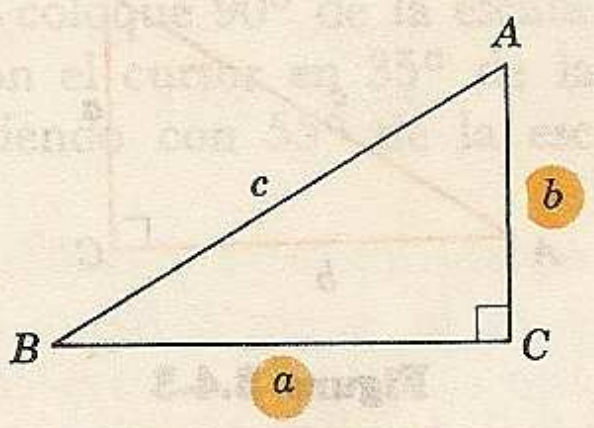


Figura 3.4-2

Solución: Trace el triángulo (figura 3.4-2) y encierre los datos en círculos. Es indiferente cuál de los dos ángulos agudos se determina primero.

Así,

$$\tan B = \frac{b}{a},$$

ó

$$\tan B = \frac{36.4}{62.5} = 0.5824.$$

De la tabla I,

$$\boldsymbol{B = 30°10'} \text{ (al múltiplo más próximo de 10 minutos).}$$

Entonces, $\boldsymbol{A = 90° - B = 59°50'}$.

Aun cuando c se puede calcular por varios caminos, es más sencillo el uso de las funciones trigonométricas que el Teorema de Pitágoras:

$$\csc B = \frac{c}{b},$$

de donde,

$$\boldsymbol{c = b \csc B}$$

ó

$$c = (36.4) \csc 30°10'.$$
$$c = (36.4)(1.990).$$
$$c = \mathbf{72.4} \text{ (aproximado a tres cifras significativas).}$$

3.4-B. RESOLUCION DE UN TRIANGULO RECTANGULO UTILIZANDO LA REGLA DE CALCULO

Para resolver un triángulo rectángulo con la ayuda de la regla de cálculo, se requiere solamente conocer dos proporciones. Una de las proporciones comprende los senos y la otra las tangentes.

Ley de los senos

Considere el triángulo rectángulo ACB de la figura 3.4-3. De las definiciones del artículo 3.2, se tiene

$$\text{sen } A = \frac{a}{c}. \tag{3.4-1}$$

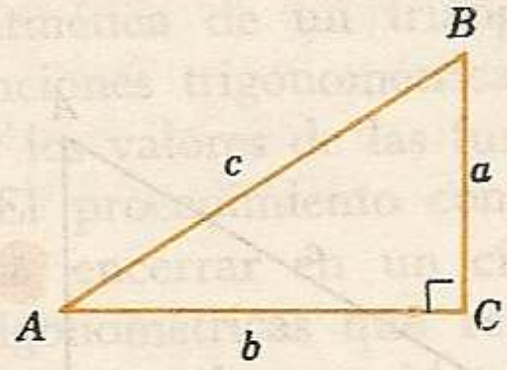


Figura 3.4-3

Dividiendo entre a los dos miembros de la igualdad 3.4-1, se tiene

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{1}{c}. \tag{3.4-2}$$

Como sen $90° = 1$, 3.4-2 se puede escribir

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } 90°}{c}. \tag{3.4-3}$$

En forma análoga

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } 90°}{c}. \tag{3.4-4}$$

y combinando 3.4-3 y 3.4-4, resulta

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } 90°}{c}. \tag{3.4-5}$$

La proporción anterior, llamada *ley de los senos* para triángulos rectángulos, se puede emplear para la resolución de todos los triángulos rectángulos, a excepción hecha del caso en que los únicos datos sean los catetos. Los lados a, b y c se leen en la escala D de la regla de cálculo, y los ángulos A y B en la escala S.

Ejemplo 1. Resuelva el triángulo rectángulo ACB, dados $c = 7.25$ y $A = 35°$.

Solución: Trace el triángulo (figura 3.4-4) y encierre los datos en círculos. De $B = 90° - A$, se tiene, $B = 55°$.

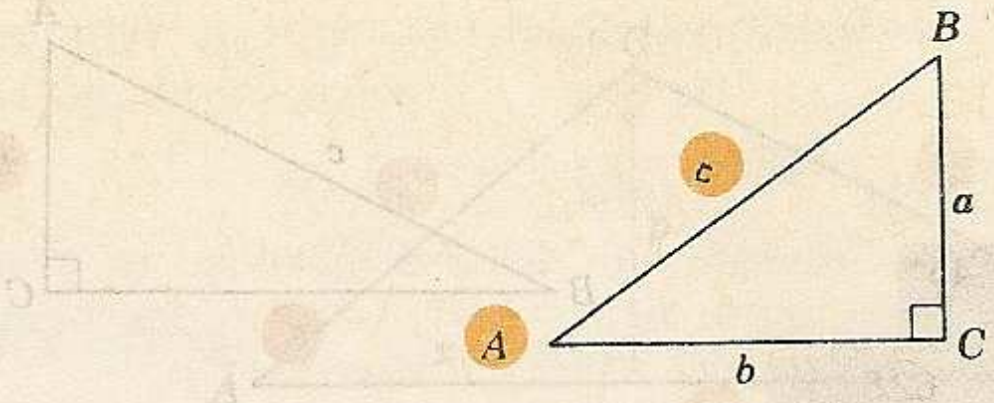


Figura 3.4-4

Use la ley de los senos para triángulos rectángulos:

$$\frac{\text{sen } 35°}{a} = \frac{\text{sen } 55°}{b} = \frac{\text{sen } 90°}{7.25}.$$

En la regla de cálculo coloque 90° de la escala *S* coincidiendo con 7.25 de la escala *D*; ahora, con el cursor en 35° de la escala *S*, lea $a = \mathbf{4.16}$ en la escala *D* y coincidiendo con 55° de la escala *S*, lea $b = \mathbf{5.94}$ en la escala *D*.

Ley de las tangentes

Si se conocen los catetos de un triángulo rectángulo, se puede escribir (figura 3.4-3):

(3.4-6) $$\tan A = \frac{a}{b}.$$

o bien

(3.4-7) $$\frac{\tan A}{a} = \frac{1}{b}.$$

En el artículo 2.4, se vio que tan 45° = 1; por tanto, 3.4-7 se puede escribir

(3.4-8) $$\frac{\tan A}{a} = \frac{\tan 45°}{b}.$$

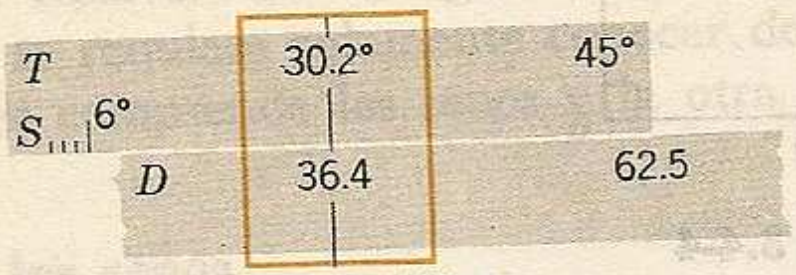
La proporción anterior, denominada *ley de las tangentes* permite calcular el ángulo *A*. Los lados *a* y *b* se leen sobre la escala *D* y el ángulo *A* sobre la escala *T*. Una vez conocido *A* se puede completar la resolución del triángulo usando la ley de los senos.

Nota: Si *b* es el *mayor* de los catetos, el ángulo *A* será *menor* que 45°.

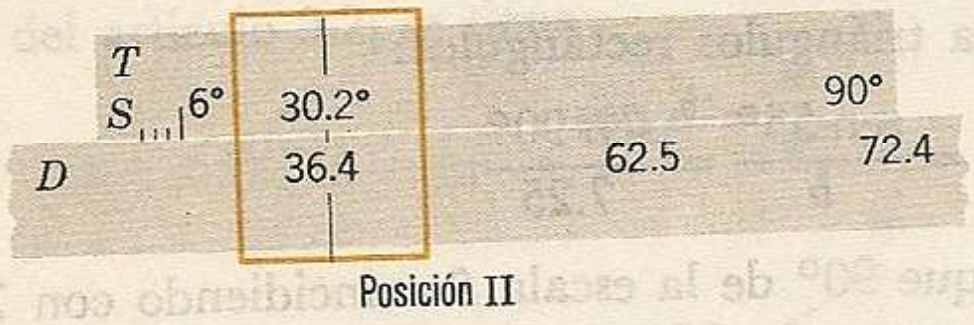
A continuación se da una regla útil para la resolución de triángulos rectángulos de catetos conocidos, mediante el empleo de la regla de cálculo.

1) *Coloque uno de los índices de la regleta frente al valor del cateto mayor leído en la escala D.*

2) *Con el cursor en el valor del cateto menor, sobre la escala D, lea el valor del menor de los ángulos en la escala T. Deje el cursor en este lugar de la escala D.*

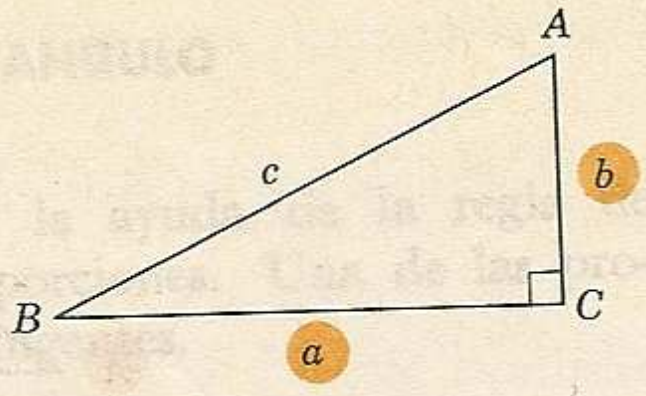


Posición I



Posición II

Figura 3.4-5



3) *Mueva ahora la regleta hacia la derecha hasta que el ángulo menor, antes leído, aparezca en la escala S frente al cursor.*

4) *Corra el cursor hasta el índice de la regleta y lea sobre la escala D el valor de la hipotenusa.*

5) *El ángulo mayor se obtiene buscando el complemento del menor.*

Ejemplo 2. Resuelva el triángulo ACB, dados $a = 62.5$ y $b = 36.4$.

Solución: Trace el triángulo (figura 3.4-5) y encircule los datos. Usando la regla antes dada, se obtiene: $\boldsymbol{B = 30.2°, c = 72.4, A = 59.8°}$.

EJERCICIOS 3.4

1. Resuelva el triángulo rectángulo ACB. En caso de usar regla de cálculo, redondee los datos a tres cifras significativas.

a) $a = 2,\ A = 32°$.
b) $b = 3,\ A = 29°$.
c) $a = 3,\ b = 4$.
d) $a = 13,\ b = 5$.
e) $a = 12.5,\ b = 9.1$.
f) $a = 16.3,\ B = 38°30'$.
g) $b = 0.64,\ A = 62°40'$.
h) $b = 709,\ B = 18°10'$.
i) $c = 6.29,\ A = 10°20'$.
j) $c = 6.18,\ B = 30°10'$.
k) $a = 127,\ c = 164$.
l) $A = 44°15',\ a = 843.2$.
m) $B = 47°26'\ c = 4217$.
n) $A = 13°30',\ c = 627$.
o) $B = 6°12',\ c = 1720$.
p) $a = 101,\ b = 120$.
q) $a = 14.72,\ b = 13.14$.
r) $b = 0.0353,\ c = 0.0589$.
s) $b = 1.241,\ c = 3.265$.
t) $A = 11°36',\ b = 0.4214$.

2. Un triángulo oblicuángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos trazando una de las alturas. Si se conoce un ángulo, se traza la altura de manera que uno de los triángulos resultantes contenga dos de los datos.

Resuelva los siguientes triángulos oblicuángulos utilizando el método anterior:

a) $A = 20°,\ B = 40°,\ b = 10$.
b) $A = 35°,\ C = 75°,\ a = 15$.

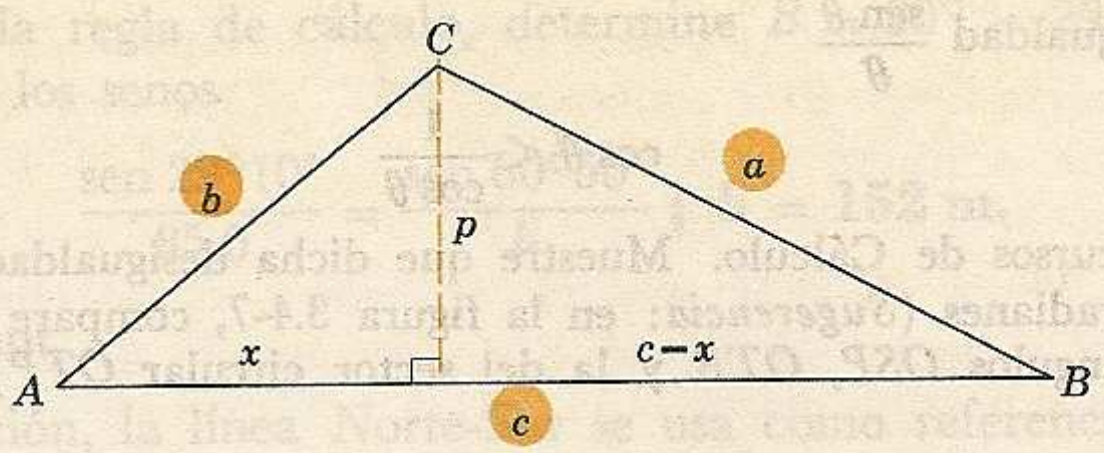


Figura 3.4-6

c) $A = 32°$, $b = 10$, $c = 20$.
d) $C = 60°$, $a = 12$, $b = 16$.
e) $A = 20°$, $b = 5$, $a = 10$.
f) $C = 55°$, $c = 27$, $a = 30$.
g) $c = 26.3$, $C = 57°20'$, $A = 22°30'$.
h) $a = 11.2$, $b = 27.7$, $C = 20°10'$.

3. Muestre que en el triángulo oblicuángulo de lados a, b y c (figura 3.4-6)

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

(*Sugerencia*: Iguale el valor de p obtenido de cada triángulo rectángulo).

4. Haciendo uso del problema 3, resuelva los triángulos:

a) $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$.
b) $a = 4$, $b = 8$, $c = 10$.

5. Considere un triángulo rectángulo ACB. Muestre que el área S tiene por expresión

$$S = \frac{1}{2} a^2 \tan B.$$

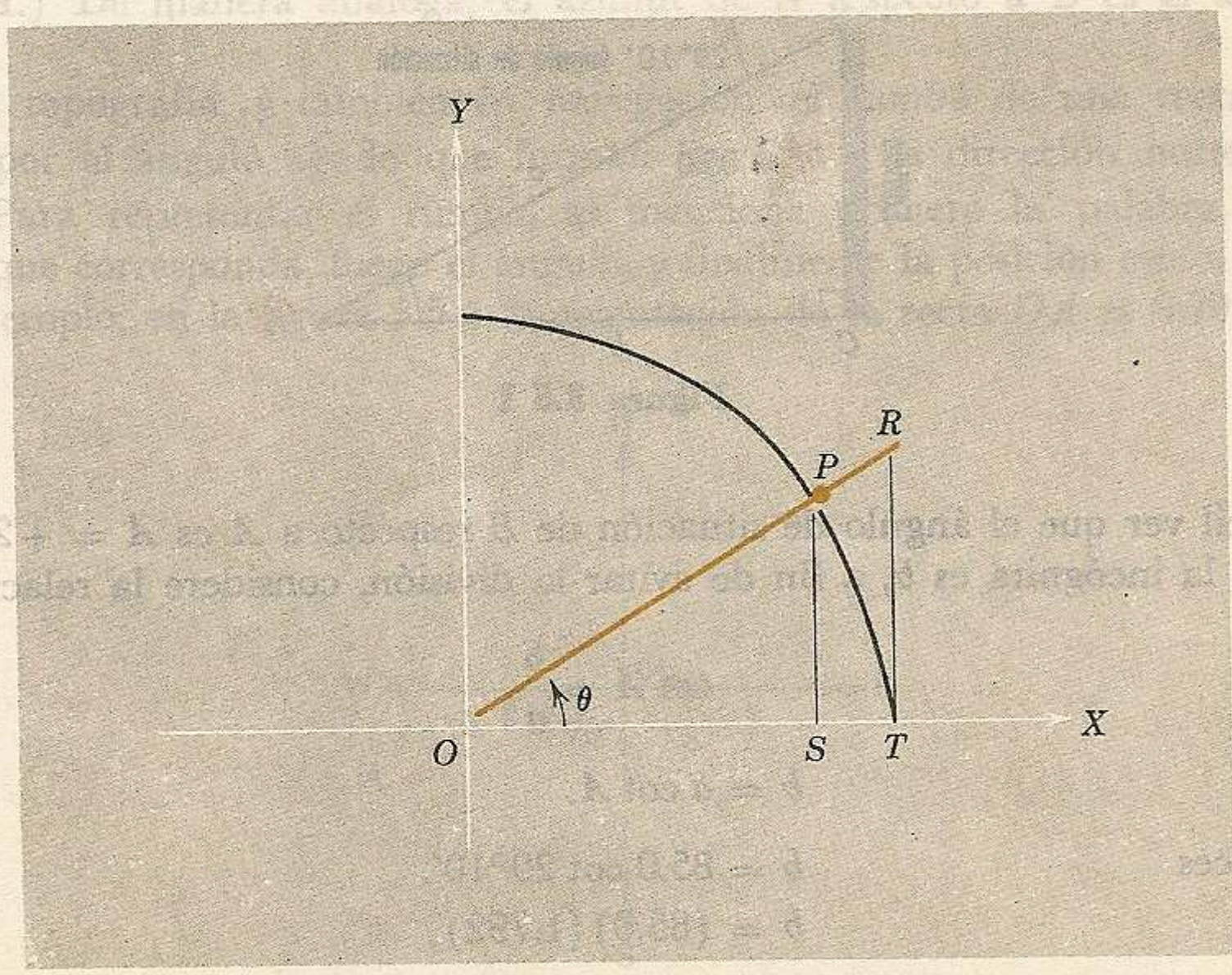


Figura 3.4-7

6. La desigualdad $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$

$$\cos\theta < \frac{1}{\cos\theta}$$

se estudia en cursos de Cálculo. Muestre que dicha desigualdad es cierta para $0 < \theta < \pi/2$ radianes (*Sugerencia*: en la figura 3.4-7, compare las áreas de los triángulos rectángulos OSP, OTR y la del sector circular OTP).

3.5. APLICACIONES ELEMENTALES

En este artículo daremos algunos tipos de problemas prácticos cuya solución se puede hallar resolviendo triángulos rectángulos.

Angulos de situación

Línea de mira de un objeto, es la línea que va del ojo del observador al objeto; el ángulo formado por la línea de mira y el plano horizontal que pasa por el ojo del observador, se llama **ángulo de situación** del objeto, el cual puede ser positivo o negativo. Es positivo cuando el objeto queda arriba del plano y negativo en caso contrario.

Ejemplo 1. Desde la azotea de un edificio de 85 m de altura, el ángulo de situación de un automóvil es $-29°10'$; calcule la distancia del automóvil a la base del edificio, medida horizontalmente.

Solución: Trace un triángulo que represente las condiciones dadas, y encircule los datos (figura 3.5-1).

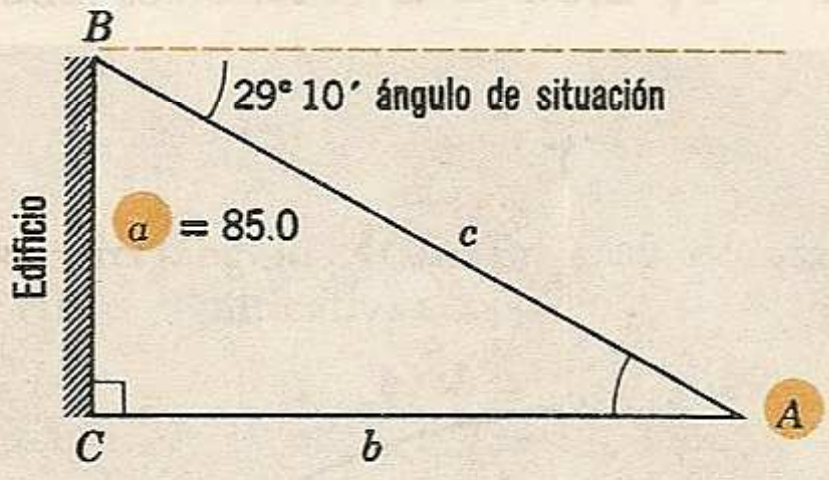


Figura 3.5 1

Es fácil ver que el ángulo de situación de B respecto a A es $A = +29°10'$. Como la incógnita es b, a fin de evitar la división, considere la relación

$$\cot A = \frac{b}{a}.$$

ó $$b = a \cot A.$$

Entonces $$b = 85.0 \cot 29°10'.$$

$$b = (85.0)(1.792),$$

$b = \mathbf{152\ m.}$ (redondeando a tres cifras significativas).

Si emplea la regla de cálculo, determine $B = 90° - 29°10' = 60°50'$ y use la ley de los senos

$$\frac{\text{sen } 29°10'}{85.0} = \frac{\text{sen } 60°50'}{b}\ ;\ \boldsymbol{b = 152\ \text{m}.}$$

Rumbo y azimut

En navegación, la línea Norte-Sur se usa como referencia para medir direcciones. Por lo común se la representa por una recta vertical.

El **derrotero** C_n de un barco, es el ángulo medido a partir del Norte, en sentido dextrógiro, hasta el segmento orientado que representa el desplazamiento del barco (figura 3.5-2). El ***azimut*** de B respecto a A es el ángulo medido a partir del norte hasta la recta AB, en sentido dextrógiro,

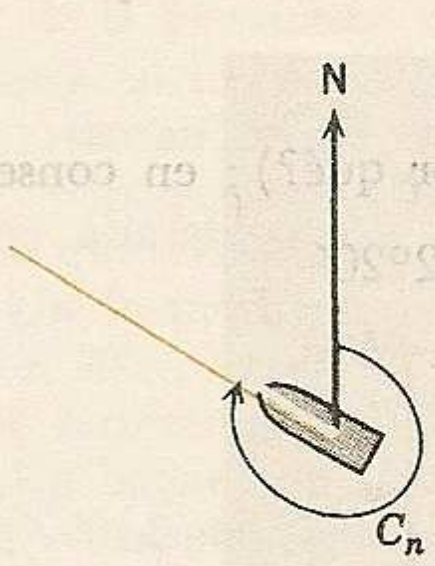


Figura 3.5-2

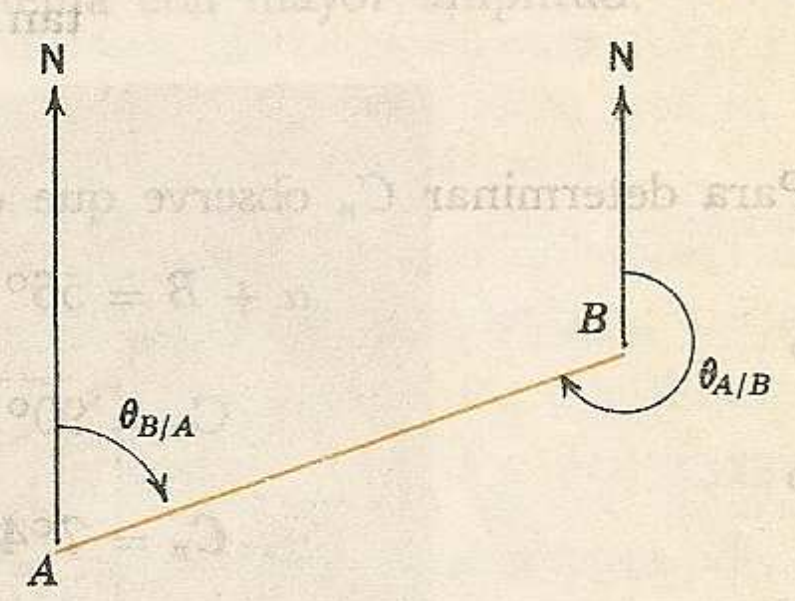


Figura 3.5-3

o sea el ángulo $\theta_{B/A}$ en la figura 3.5-3. (La notación B/A significa B respecto a A.) De manera análoga, el azimut de A respecto a B es el ángulo $\theta_{A/B}$.

En topografía, y también en navegación, el *rumbo* de una recta está dada por el ángulo agudo que forman la recta y la dirección norte o la sur. Para representar el rumbo, se menciona primero la palabra norte o sur que corresponda, luego el ángulo, y finalmente la posición este u oeste. Por ejemplo, en la figura 3.5-4 la orientación de la recta OA es S 70°W.

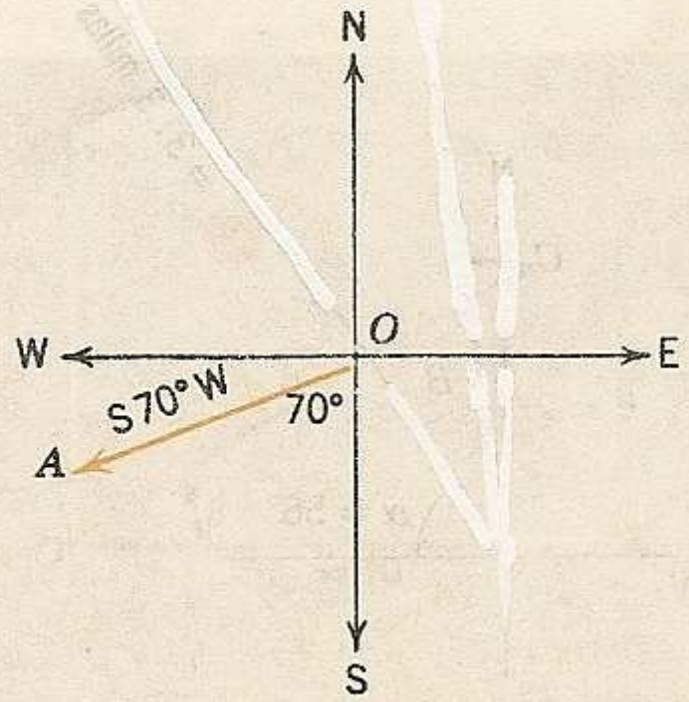


Figura 3.5-4

Ejemplo 2. Un barco recorre 15.5 millas náuticas en un derrotero de 124.0°; recorre luego 31.3 millas a 214.0°. ¿Qué derrotero debe tomar para regresar a su punto de partida?

Solución: Haga un diagrama de acuerdo con las condiciones dadas (figura 3.5-5); se tiene así un triángulo rectángulo de catetos conocidos. Para determinar B, use

$$\tan B = \frac{b}{a},$$

$$\tan B = \frac{15.5}{31.3},$$

$$\tan B = 0.4951,$$

$$B = 26°20'.$$

Para determinar C_n observe que $\alpha = 56°$. (¿Por qué?); en consecuencia,

$$\alpha + B = 56° + 26°20' = 82°20'$$

y

$$C_n = 90° - (\alpha + B),$$

o

$$\boldsymbol{C_n = 7°40'.}$$

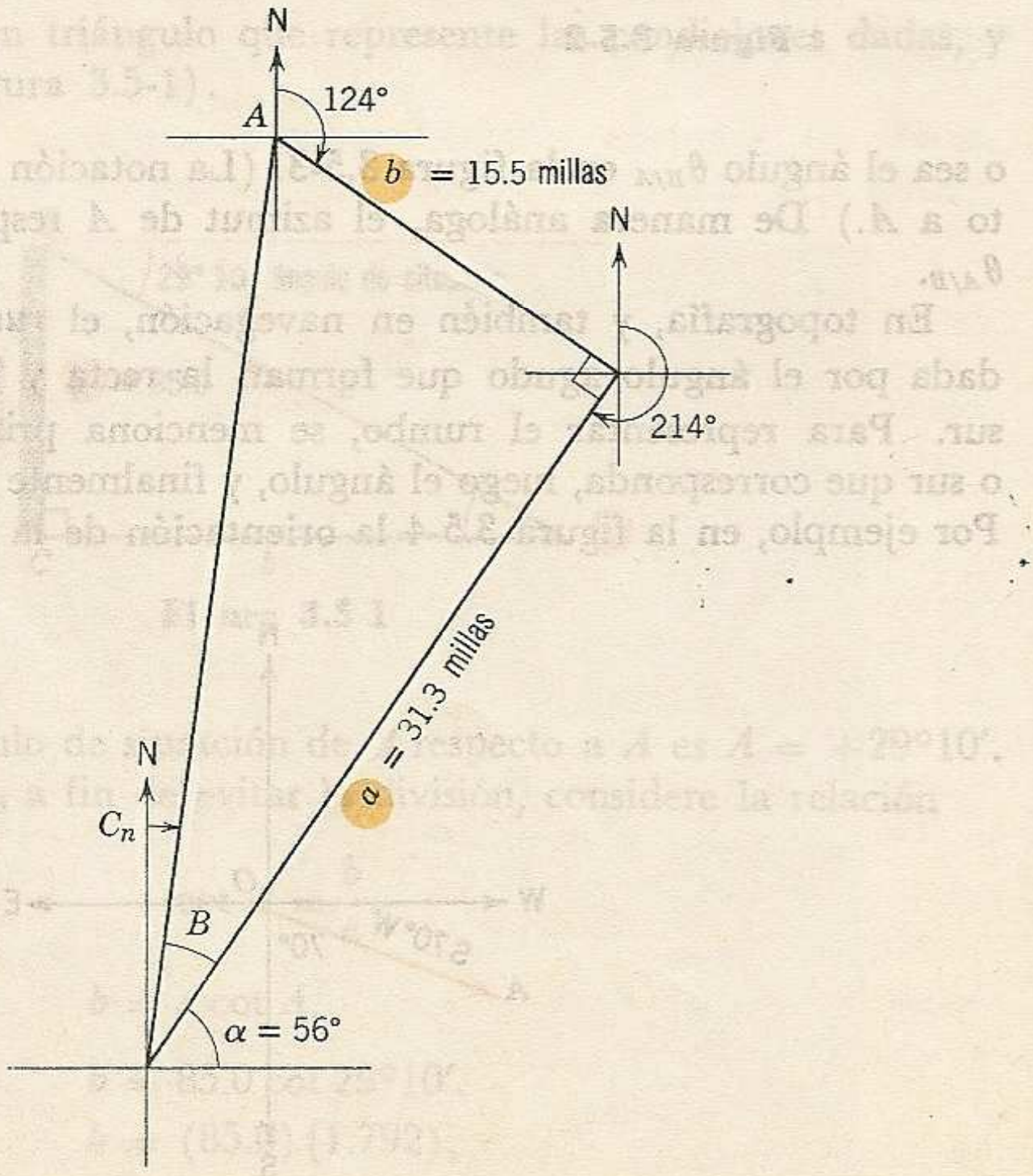


Figura 3.5-5

Vectores

Las magnitudes físicas tales como fuerza, velocidad, aceleración y, en general, todas las cantidades que para ser definidas requieren que se conozca su magnitud, dirección y sentido, se pueden representar por un *vector*. Un vector se representa como un segmento orientado, que posee *magnitud, dirección* y *sentido*; cuando el vector está contenido en un plano, su dirección se da con referencia a algún eje; si éste es el eje X, la dirección (dirección + sentido) del vector está dada por un ángulo en posición normal. El sentido se indica gráficamente por medio de un segmento de recta con una flecha en uno de sus extremos; la magnitud está asociada a la longitud de dicho segmento (figura 3.5-6).

En el capítulo 12 se estudiará este tema con mayor amplitud.

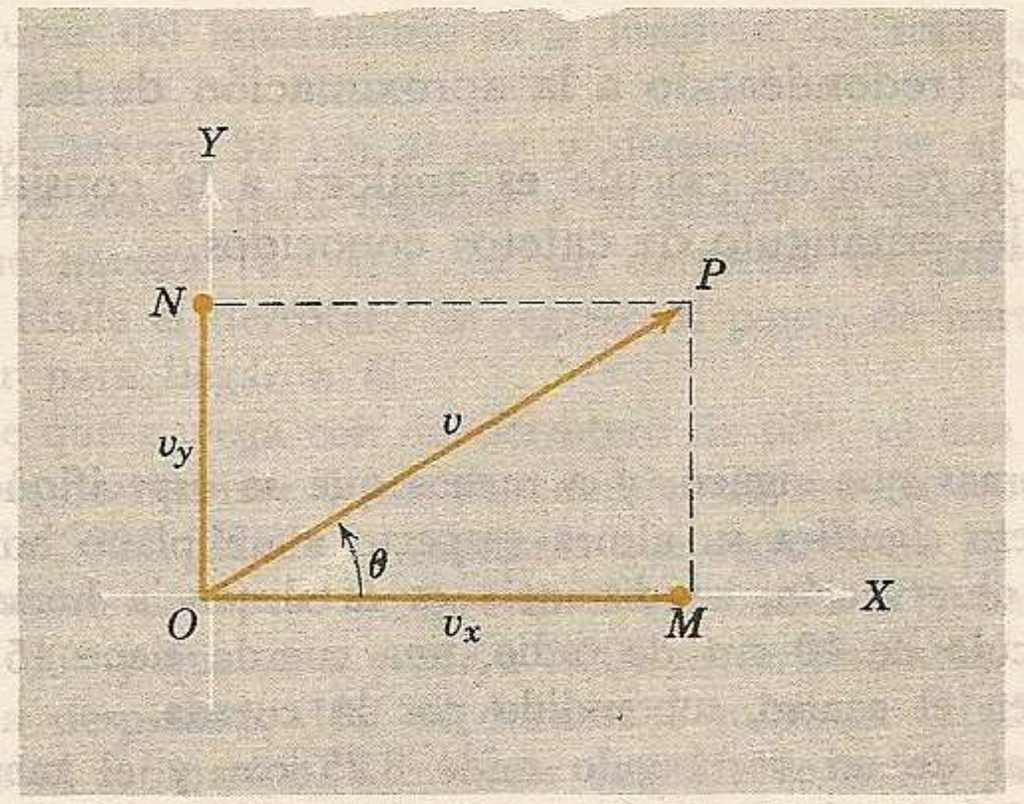


Figura 3.5-6

Los segmentos dirigidos OM y ON, proyecciones de OP sobre los ejes X y Y, respectivamente, son las **componentes escalares** del vector; la primera es la **componente X** y la segunda la **componente Y del vector** y sus valores están dados por

$$v_x = v \cos\theta\,; \quad v_y = v \operatorname{sen}\theta.$$

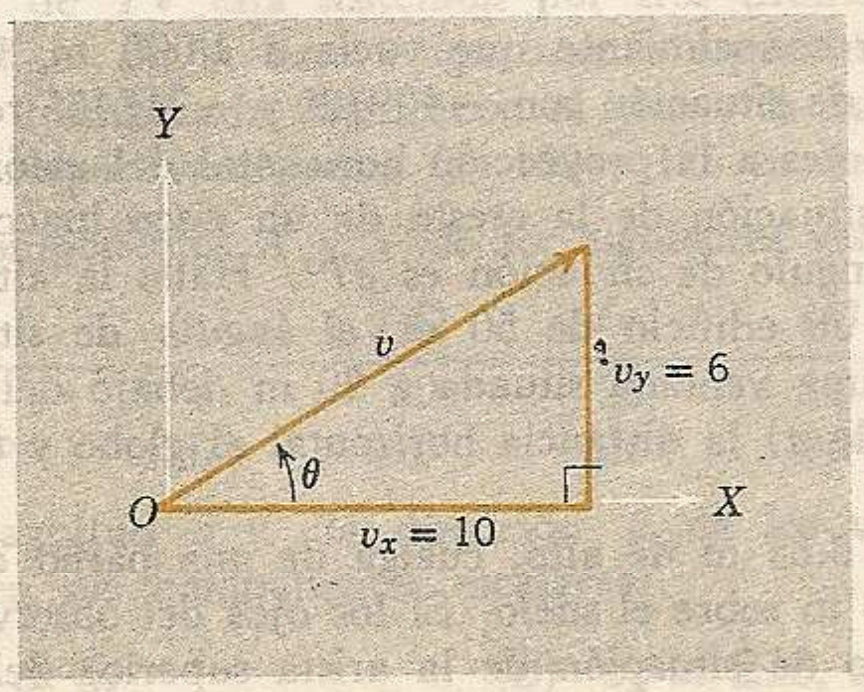


Figura 3.5-7

Obviamente, $MP = ON$, de modo que si v_x y v_y son conocidas, la magnitud v y la dirección θ se pueden determinar resolviendo el triángulo rectángulo OMP.

Ejemplo 3. Halle la magnitud y la dirección del vector cuyos componentes son $v_x = 10$ y $v_y = 6$.

Solución: Trace el triángulo (figura 3.5-7) y halle v y θ.

$$\tan\theta = \frac{6}{10} = 0.6,$$

de donde

$$\theta = \mathbf{31°}.$$
$$v = 10 \sec\theta = 10 \sec 31°,$$
$$v = (10)(1.167) = 11.67,$$

y

$$v = \mathbf{12} \text{ (redondeando a la aproximación de los datos)}.$$

La resolución con regla de cálculo es análoga a la considerada en **3.4 B** para un triángulo rectángulo de catetos conocidos.

EJERCICIOS 3.5

En los problemas que siguen, y a menos que se especifique lo contrario, la altura de un objeto significa su altura respecto a un plano horizontal que pasa por el punto de observación; su distancia es la distancia horizontal.

1. En un círculo de 10 cm de radio, una cuerda tiene 15 cm de longitud. Halle el ángulo en el centro, subtendido por la cuerda.

2. La diagonal de un rectángulo mide 8.25 cm y el menor de sus lados 3.14 cm. Calcule el ángulo formado por la diagonal y el lado mayor, y la longitud de éste.

3. Un avión de reconocimiento localiza una batería cuyo ángulo de situación es de $-23°10'$. Si el avión vuela a 3 000 m de altura, halle la distancia a que está la batería de la proyección horizontal del avión.

4. El ángulo de situación de la cresta de un árbol es de 32° respecto a un punto situado a 25 m de su base; halle su altura.

5. Durante un aterrizaje, el piloto desea pasar 10 m arriba de una pared de 25 m de altura y tocar tierra 200 m más allá de la pared. Halle el ángulo de descenso.

6. Un avión de reconocimiento que vuela a 1 000 m, ve dos botes delante de él. Si sus ángulos de situación son $-42°12'$ y $-31°15'$ respectivamente, halle las distancias de los botes a la proyección horizontal del avión.

7. El ángulo de situación de la cresta de un risco inaccesible es 48°; retrocediendo 150 m, el ángulo de situación es 27°. Halle la altura del risco.

8. Del techo de un edificio de 50 m, el ángulo de situación de un globo es $+20°$; respecto a una ventana situada a 20 m debajo del techo, el ángulo de situación es 30°. Halle *a)* la distancia horizontal al globo y *b)* la altura del mismo sobre el suelo.

9. Un cuadro de 3.65 m de alto, cuelga de una pared de tal modo que su arista inferior está a 3 m sobre el suelo. Si los ojos del observador están a 1.65 m de altura, y el ángulo de situación de la arista superior del cuadro es de 44°, halle la distancia del observador a la pared y la *paralaje* del cuadro respecto

al observador (ángulo subtendido por el cuadro y cuyo vértice está en los ojos del observador).

10. Un observador ve que el ángulo de situación de la punta de una torre situada a 100 m de él, es de 10°. Halle la distancia vertical: de los pies del observador, cuya estatura es de 1.8 m, a la base de la torre y diga si están arriba o abajo de ésta.

11. Un avión de reacción pasa a 6 000 m de altura, en vuelo horizontal sobre una estación de radar; 10 seg después, es observado desde el radar con un ángulo de elevación de 49°. Halle la velocidad de crucero del avión, respecto al suelo.

12. Un avión que vuela a 250 kph respecto al aire, desciende a 21° respecto a la horizontal. Halle la componente vertical de la velocidad.

13. Halle la altura mínima de un cohete para que pueda ser visto desde un punto situado a 200 km de distancia, contada sobre la superficie de la tierra a partir de la plataforma de lanzamiento. El radio de la tierra mide 6 400 km. La distancia al lugar del lanzamiento es la longitud del segmento de arco en la superficie de la Tierra.

14. Un buque navega 32 km al sur y después 15 km al oeste. Determine el rumbo que debe tomar para regresar a su punto de partida.

15. Un buque navega 18.3 km con un derrotero de 110°; después recorre 42.0 km a 200°. Halle el derrotero de regreso al punto de partida y la distancia que debe recorrer para llegar a él.

16. Un buque que navega con un derrotero de 60°, ve una luz cuyo azimuth es de 25°. Después de recorrer 5 km sin cambiar de rumbo, localiza la luz, ahora con un azimuth de 330°. Halle la distancia que separaba a la luz del buque.

17. Un submarino en reposo ve que en el cuadrante NW navega un destróyer cuyo derrotero es 60° y que va a pasar a 1 200 m de distancia. Se determina que el destróyer se ha desplazado 100 m durante 5 minutos. Halle el azimuth del destróyer respecto al submarino, 8 minutos después de haber pasado.

18. Los puntos A y B están: el primero 3.4 km al sur de C y el segundo a 6.3 km al este de este último punto. Halle el azimuth de A respecto a B.

19. Un topógrafo desea determinar la anchura de un río. Al efecto, del punto C de la ribera, ve que el punto A, al otro lado del río queda el N 52°E; después se desplaza hacia el este, siguiendo la orilla del río hasta el punto B situado a 252 m de C. Si B queda al sur de A, halle la anchura buscada.

20. En un lote triangular ABC, $AC = 326$ m apunta al $S\ 82°30'E$ y $CB = 222$ m tiene un rumbo $N\ 61°20'W$. Halle la longitud y el rumbo de AB. (*Sugestión*: trace la altura relativa al lado AC).

21. Una antena de TV está sostenida por tres tirantes de acero sujetos a anclas situadas a 67 m de la base e igualmente espaciadas alrededor de ella. Halle el ángulo que forma cada tirante con el piso y la suma de sus longitudes, si sus retenes están, respectivamente, a 67, 100 y 125 m de altura sobre el suelo.

22. Halle las componentes X y Y de los siguientes vectores:

	(a)	*(b)*	*(c)*	*(d)*	*(e)*	*(f)*	*(g)*	*(h)*
v	18	10	8	20	25	32	57	128
θ	30°	225°	120°	270°	130°	98°	315°	−56°

23. Halle la magnitud v y la dirección θ de los vectores siguientes, de los cuales se conocen sus componentes escalares:

(*a*) $v_x = 3, v_y = 5.$ (*b*) $v_x = 210, v_y = -132.$

(*c*) $v_x = -12, v_y = -5.$ (*d*) $v_x = -203, v_y = -87.6.$

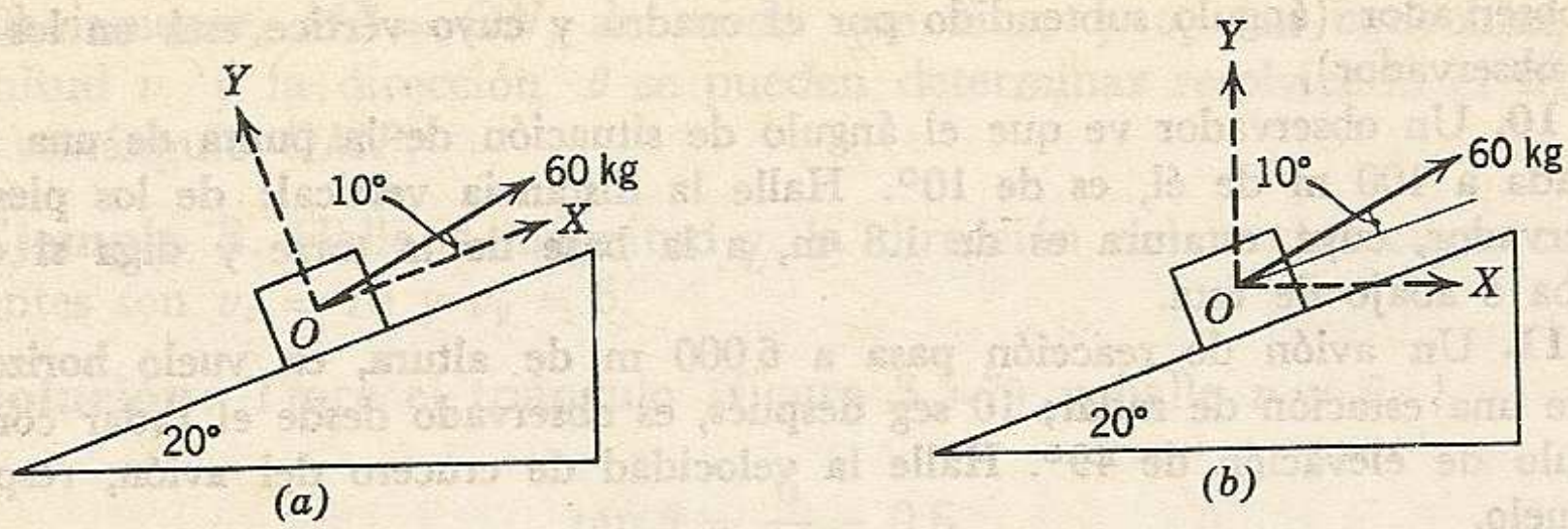


Figura 3.5-8

24. Una fuerza horizontal de 328.2 Kg está orientada hacia $S\ 28°14'W$. Halle sus componentes sur y oeste.

25. Una fuerza horizontal tiene una componente norte de 275 Kg y una oeste de 352 Kg. Halle la magnitud y la dirección de la fuerza.

26. Halle las componentes X y Y de la fuerza de 60 Kg que aparece en la figura 3.5-8; note en cada caso la selección de los ejes.

27. Un avión sigue un derrotero de 215° a 650 Kmh. Halle la distancia que vuela hacia el sur en una hora.

28. Una partícula tiene una aceleración de 2.92 m/seg² formando un ángulo de 52°30′ con el eje X. Halle las componentes X y Y de su aceleración.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 3

1. Escriba las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

2. Sea z la longitud de la diagonal de un rectángulo de lados x y y, donde $y > x$. Designe por θ el ángulo entre x y z:

a) halle x en términos de y y θ.
b) halle y en términos de z y θ.

3. Sean α y β los ángulos agudos de un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto a α vale 1. Muestre que $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \beta \tan^2 \alpha$.

4. Resuelva el triángulo rectángulo ACB si

a) $a = 3,\ b = 5.$
b) $B = 49°10',\ b = 4.32.$
c) $a = 172,\ c = 268.$

5. Un poste de teléfono, de 15 m de longitud, está inclinado 15° respecto a la vertical. Diga cuánto aumentaría su altura si estuviera vertical.

6. De un punto P se trazan tangentes a un círculo de 10 cm de radio. Si el ángulo que forman es de 23°, halle la longitud de las tangentes.

7. Respecto a la base y a la punta de una torre de 40 m de alto, los ángulos de situación de la parte más alta de un edificio son, respectivamente, 58° y 30°. Halle la altura del edificio y su distancia a la torre si las bases de ambos están en el mismo plano horizontal.

8. Halle las componentes v_x y v_y de los siguientes vectores, de los cuales se conoce su magnitud y su dirección.

a) $v = 25,\quad \theta = 120°$ *b)* $v = 50,\quad \theta = -79°.$

CAPITULO 4

Funciones trigonométricas (números reales)

4.1. INTRODUCCION

En los capítulos precedentes se estudiaron las funciones trigonométricas de ángulos dirigidos; existe, sin embargo, otro concepto muy importante: el de las funciones trigonométricas de números reales. La diferencia principal entre ambos conceptos radica en la terminología del argumento.

En las páginas que siguen se mostrará que un número real se puede representar por la longitud de un arco de círculo de radio unidad, tal como puede hacerse por medio de la coordenada de un punto sobre una recta. Las coordenadas del extremo del arco servirán de base para definir las funciones trigonométricas de los números reales y después se expondrá la relación entre números reales y ángulos dirigidos, así como la de sus funciones trigonométricas. Las funciones trigonométricas de números reales no tienen nada de misterioso, son lógicas y juegan un papel importante en la ingeniería. Usualmente se dispone de tablas para los cuadrados, cubos, raíces cuadradas, raíces cúbicas, logaritmos y otras propiedades de los números. ¿Por qué no, pues, de funciones trigonométricas de los números? En este capítulo se dará una respuesta afirmativa a esta pregunta.

Desde este punto de vista, usado en cursos de matemáticas superiores, es posible desarrollar un curso de trigonometría sin hacer intervenir el concepto de ángulo.

4.2. CIRCULO UNITARIO O CIRCULO TRIGONOMETRICO

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo situado en el mismo plano. El punto fijo se denomina centro y la distancia del centro a uno de los puntos se llama radio. Por definición, un **círculo unitario** o círculo trigonométrico es el que tiene de radio la unidad.

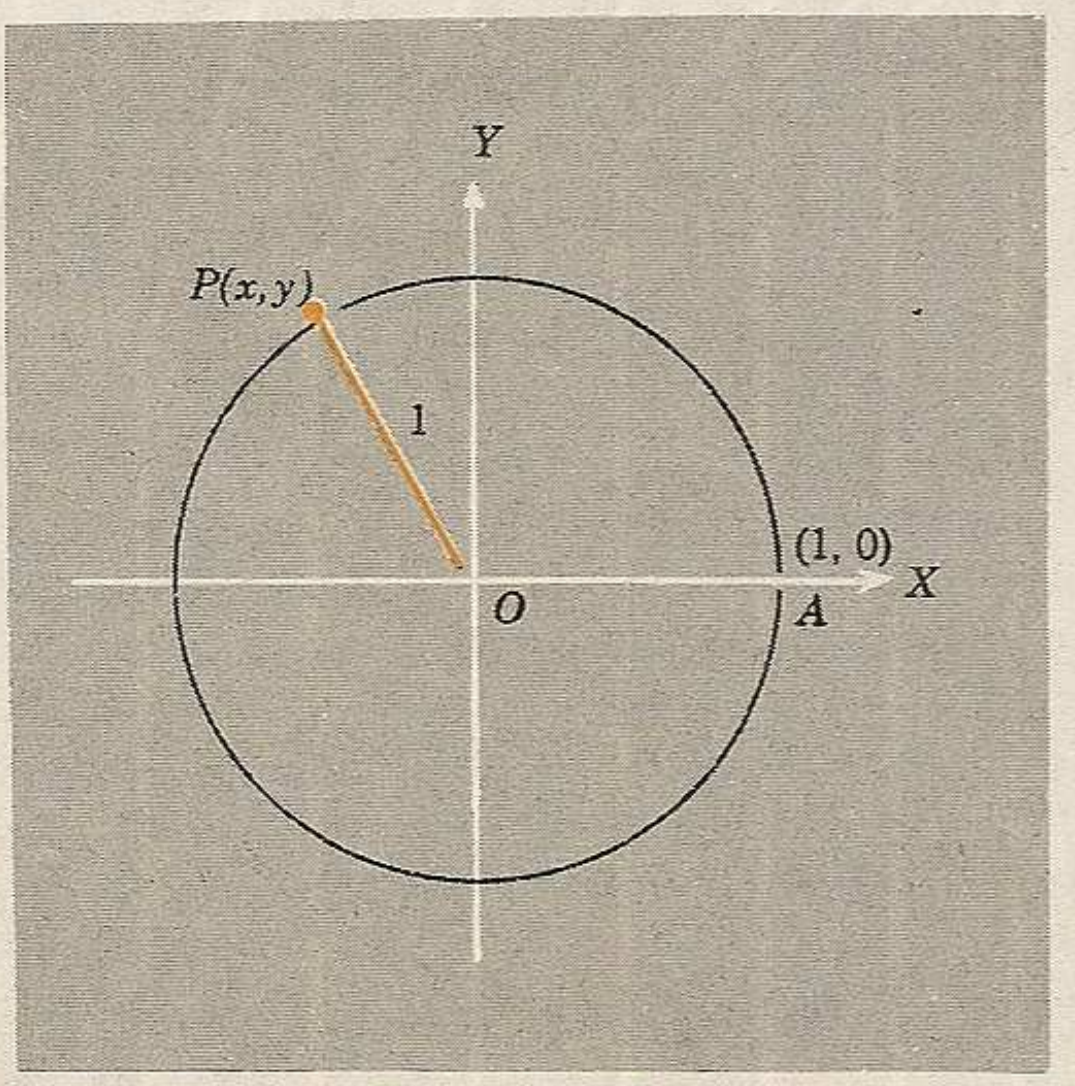


Figura 4.2-1

Considere que el centro de un círculo unitario coincide con el origen de un sistema de coordenadas rectangulares (figura 4.2-1). La distancia de cualquier punto $P(x, y)$, de la circunferencia al origen, es igual a la unidad; por tanto, $|\boldsymbol{OP}| = \mathbf{1}$. Usando la fórmula para la distancia entre dos puntos, se obtiene

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$|OP| = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = 1, \text{ ó}$$

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}, \tag{4.2-1}$$

que recibe el nombre de *ecuación de la circunferencia unitaria con centro en el origen*. Cualquier punto cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, es un punto de la circunferencia unitaria y, recíprocamente, las coordenadas de cualquier punto de la circunferencia unitaria satisfacen dicha ecuación.

La longitud de una circunferencia está dada por $C = 2\pi r$; en consecuencia, la longitud de la circunferencia unitaria es 2π unidades.

En los cursos de cálculo se estudia la longitud de un arco de curva, estudio que requiere una preparación matemática que está más allá de las pretensiones de este libro. Por tal razón se usará la siguiente idea intuitiva para medir la longitud de un arco de circunferencia: coloque un cordel sobre un arco y córtelo en los puntos extremos de éste; estire el cordel y mida su longitud. Dicha longitud es la *longitud del arco*. En lo que sigue, al especificar un arco se estará en realidad considerando su longitud.

En el círculo unitario se considera que un *arco es positivo* si parte del punto $(1, 0)$ y se recorre en sentido levógiro; en caso contrario, se dice que el *arco es negativo*. Se establece así una correspondencia biunívoca entre los números reales y los arcos de un círculo unitario, que está determinada por la longitud del arco y su sentido al medirlo. El arco del círculo unitario que parte del punto $(1, 0)$ y termina en el punto P, o punto terminal, recibe el nombre de *arco asociado* al número real que representa; por lo común, se usará el símbolo $\boldsymbol{u}$ para el número real cuyo arco asociado parte del punto $(1, 0)$. El arco mismo se representará también por $\boldsymbol{u}$; un número real positivo se representa por $\boldsymbol{u > 0}$ y uno *negativo* por $\boldsymbol{u < 0}$. El número 0 se representa por $\boldsymbol{u = 0}$, esto es, un arco de longitud nula. Para cualquier número real $\boldsymbol{u}$, existe un par de coordenadas, y solamente uno $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, para el punto terminal del arco asociado $\boldsymbol{u}$.

Si el extremo $P(x, y)$ del arco $\boldsymbol{u}$ queda en el primer cuadrante, se dice que $\boldsymbol{u}$ es un arco del primer cuadrante; si queda en el segundo cuadrante, se dice que $\boldsymbol{u}$ es un arco del segundo cuadrante y así sucesivamente para el tercero y cuarto cuadrantes.

En la figura 4.2-2 se muestran arcos asociados a diferentes números reales $\boldsymbol{u}$. Para mayor claridad en los dibujos, los arcos de más de una vuelta están representados por líneas múltiples (casos b y d), aunque obviamente dichas líneas múltiples deberían coincidir entre sí, puesto que están sobre la circunferencia unitaria; el punto terminal $P(x, y)$ dista siempre una unidad del centro del círculo.

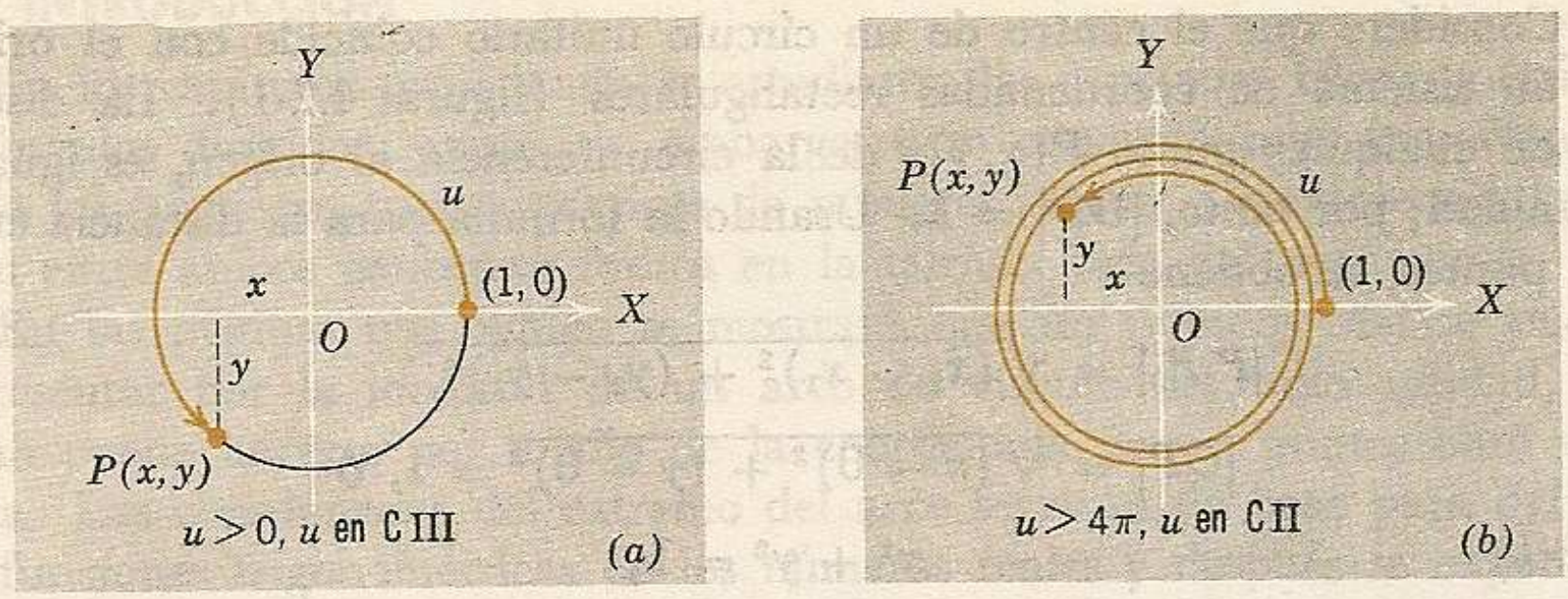


Figura 4.2-2

Al expresar algunos números reales, es conveniente hacer uso del número π por ser igual a la semicircunferencia unitaria. De esa suerte $\pi/2$ equivale a un cuarto de la circunferencia; $\pi/6$ a un doceavo, etc.

Ejemplo. En un círculo unitario trace arcos asociados a los números reales siguientes: *a)* π, *b)* -2π, *c)* 9.42.

Solución: Vea la figura 4.2-3.

Se definen como **arcos coterminales** aquellos que tienen el mismo punto inicial $(1, 0)$ y el *mismo punto* terminal $P(x, y)$; así, los arcos asociados a los números reales $\pi/3$ y $7\pi/3 = \pi/3 + 2\pi$, son arcos coterminales. En

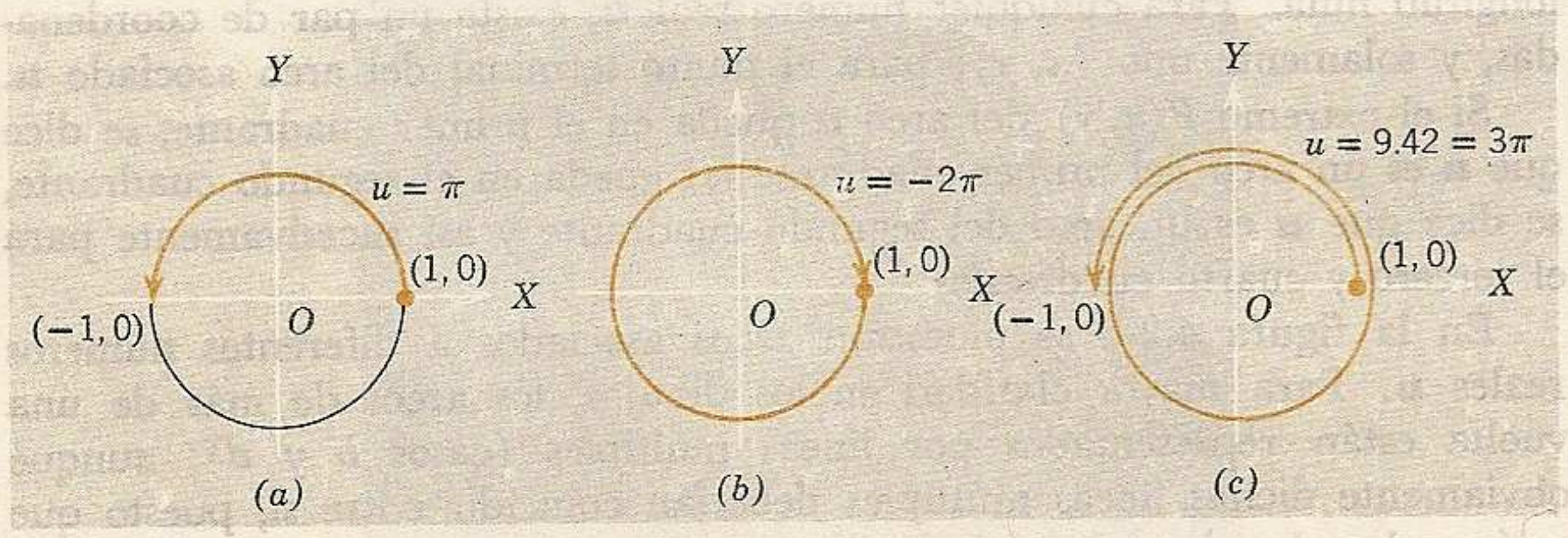


Figura 4.2-3

general, los arcos asociados a los números reales u y $u \pm 2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ son *arcos coterminales*; el número u puede ser positivo o negativo. La figura 4.2-4 muestra diferentes números u y v cuyos arcos asociados son coterminales.

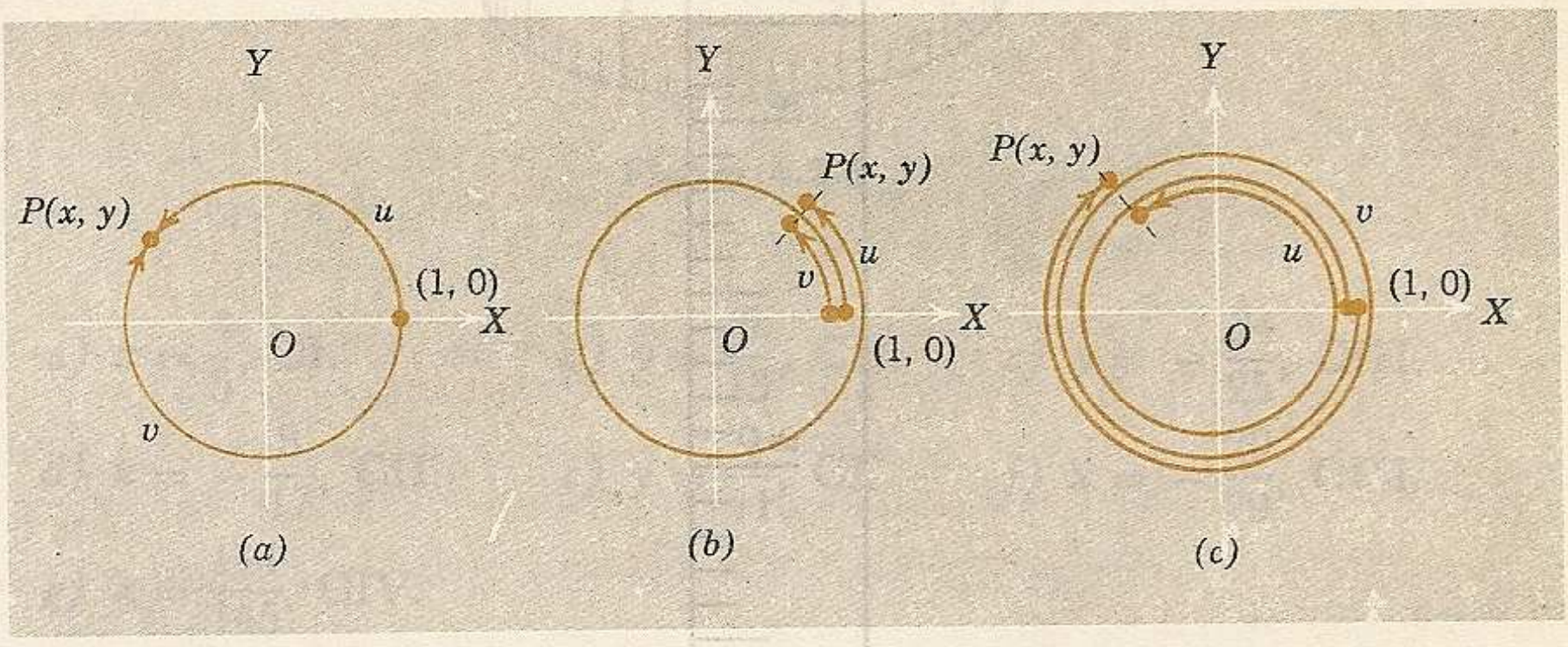


Figura 4.2-4

EJERCICIOS 4.2

1. Sobre una tira de papel reproduzca la figura 4.2-5, engome uno de sus extremos y péguelo al otro formando así una regla circular cuyo radio (figura 4.2-6) es igual a una pulgada.* Con un compás y con centro en el origen de coordenadas, trace un círculo unitario de radio una pulgada. Coloque ahora la regla circular sobre el círculo de tal manera que la marca 0 coincida con el punto $(1, 0)$ y trace los arcos asociados a los números siguientes:

a) 1; *b)* 2; *c)* 3; *d)* 4; *e)* 5; *f)* 6; *g)* 0.5; *h)* 1.7; *i)* 4.3; *j)* 5.9; *k)* 3.6; *l)* 7; *m)* 8; *n)* 9; *o)* 10; *p)* 30.

2. Mismo problema para los valores negativos de aquellos números.

3. Trace los arcos u asociados a los números reales siguientes. Indique en el diagrama un arco v coterminal con u.

a) $\frac{\pi}{2}$; *b)* $\frac{\pi}{6}$; *c)* $\frac{\pi}{4}$; *d)* $\frac{2\pi}{3}$; *e)* $\frac{7\pi}{6}$; *f)* $-\pi$; *g)* $-\frac{3\pi}{2}$; *h)* $-\frac{4\pi}{3}$; *i)* $-\frac{3\pi}{3}$; *j)* $-\frac{\pi}{2}$; *k)* 1.05; *l)* 3.14; *m)* 6.28; *n)* -1.05; *o)* -3.2; *p)* -8.2.

4. Defina: *a)* un arco del segundo cuadrante; *b)* un arco del tercer cuadrante; *c)* uno del cuarto cuadrante.

5. ¿Existe más de un arco cuyas coordenadas de su punto terminal sean (x, y)? ¿Cuántos?

6. Dada una de las coordenadas del punto terminal de un arco, halle la otra y trace dos arcos $u < 2\pi$ cuyo punto terminal tenga la coordenada dada y esté en el cuadrante indicado.

* Algunos de los ejercicios se dejan intencionalmente en unidades inglesas con el fin de que el estudiante se familiarice con el uso de varios sistemas de unidades. [*N. T.*]

Figura 4.2-5

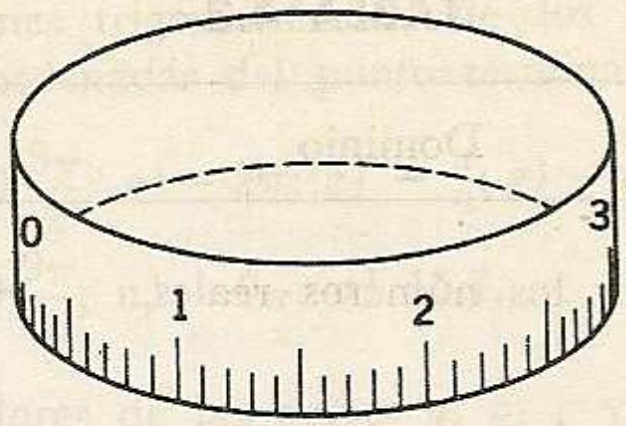


Figura 4.2-6

a) $x = \frac{4}{5}$, CI. *b)* $y = \frac{5}{13}$, CII. *c)* $y = -\frac{24}{25}$, CIII.

d) $x = -\frac{8}{17}$, CII. *e)* $y = \frac{9}{41}$, CI. *f)* $x = -\frac{20}{29}$, CIII.

g) $x = \frac{144}{145}$, CIV.

4.3. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE NUMEROS REALES

Para cada número real u existe un par de coordenadas (x, y), y solamente uno, que son las coordenadas del punto terminal del arco u asociado, que parte de $(1, 0)$ (figura 4.3-1). Por tanto, las coordenadas x y y son funciones del número real u.

En la tabla 4.3 se definen las funciones trigonométricas del número real u, para las cuales son válidas las notas que se dieron en el artículo 2.1 para las funciones trigonométricas de los ángulos.

Cuando se hable de funciones trigonométricas en general, se hará uso de la notación $T(u)$ que va a significar: las *funciones trigonométricas del número real* u.

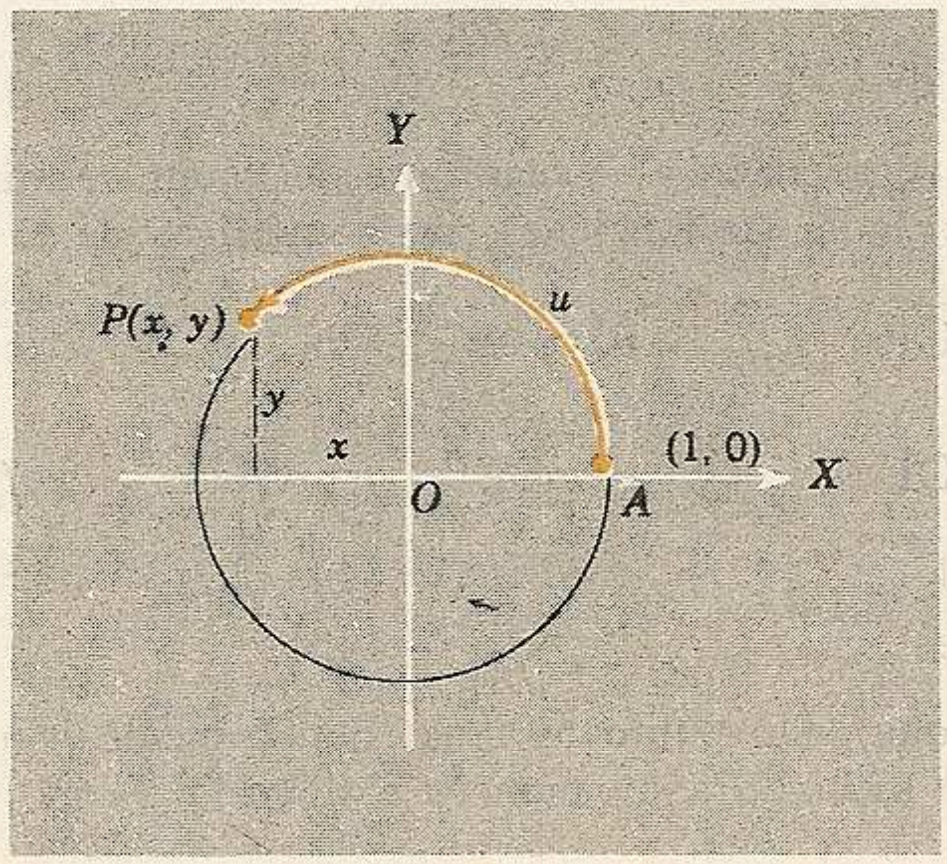


Figura 4.3-1

TABLA 4.3

Función	Dominio	Recorrido
sen $u = y$.	Todos los números reales.	$-1 \leqq$ Todos los números reales $\leqq 1$.
cos $u = x$.	Todos los números reales.	$-1 \leqq$ Todos los números reales $\leqq 1$.
tan $u = \frac{y}{x}$.	Todos los números reales para los cuales $x \neq 0$.	Todos los números reales.
cot $u = \frac{x}{y}$.	Todos los números reales para los cuales $y \neq 0$.	Todos los números reales.
sec $u = \frac{1}{x}$.	Todos los números reales para los cuales $x \neq 0$.	Todos los números reales $\leqq -1$ ó $\geqq 1$.
csc $u = \frac{1}{y}$.	Todos los números reales para los cuales $y \neq 0$.	Todos los números reales $\leqq -1$ ó $\geqq 1$.

El signo algebraico de las funciones trigonométricas de números reales, depende de los signos de la abscisa y la ordenada del punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria.

EJERCICIOS 4.3

1. Defina tan u, cot u, sec u y csc u en términos de sen u y/o cos u.

2. Complete la tabla siguiente:

Cuadrante del número real u	Funciones positivas	Funciones negativas
I	Todas	
II		
III	tan u cot u	
IV		

3. Dada una coordenada y el cuadrante del punto terminal del arco asociado al número real u, halle las funciones trigonométricas de u.

a) $x = \frac{12}{13}$, CI. *b)* $y = \frac{3}{5}$, CII. *c)* $x = -\frac{7}{25}$, CIII.

d) $y = \frac{12}{37}$, CI. *e)* $y = -\frac{5}{13}$, CIII. *f)* $y = -\frac{4}{5}$, CIII.

g) $y = -\frac{21}{29}$, CIV. *h)* $y = -\frac{144}{145}$, CIV.

4. Muestre que todo punto terminal que coincide con algún eje, es el extremo de un arco asociado a un número real de la forma

$$\pm n\frac{\pi}{2},\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

5. Halle las funciones trigonométricas de los números reales que siguen. (*Sugestión*: halle las coordenadas del punto terminal del arco asociado).

a) 0; *b)* $\frac{\pi}{2}$; *c)* π; *d)* $\frac{3\pi}{2}$; *e)* -2π; *f)* $-\frac{\pi}{2}$; *g)* $-\pi$; *h)* $-\frac{3\pi}{2}$; *i)* 1.57; *j)* 7.85; *k)* -3.14; *l)* -9.42; *m)* $\frac{9\pi}{2}$; *n)* -9π; *o)* 15.7.

6. Compare los valores de las partes *a*, *b*, *c* y *d* del problema 5, con los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos 0, $\pi/2$, π y $3\pi/2$ radianes.

7. Muestre que para toda u, $T(u + 2\pi) = T(u)$.

8. Halle cuatro valores no negativos de $u < 2\pi$, para los cuales $\tan u = \cot u$.

9. Si $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\operatorname{sen} \pi/2 = 1$, diga si $\operatorname{sen} \pi = 2$. ¿Por qué?

10. Diga si puede ser $\sec u = \frac{1}{2}$ y por qué.

11. Diga si puede ser $\csc u = 0$ y por qué.

12. Escriba en palabras la regla de correspondencia implícita en los símbolos

a) $\operatorname{sen} u$; *b)* $\cos u$; *c)* $\tan u$; *d)* $\cot u$; *e)* $\sec u$; *f)* $\csc u$.

13. Diga si $\tan u$ tiene un valor máximo. En caso afirmativo, diga cuál es.

14. Diga cuál es el valor mínimo de $\operatorname{sen} u$.

15. Cuando u tiende a cero, diga que pasa con $\csc u = 1/\operatorname{sen} u$.

4.4. NÚMEROS REALES Y ÁNGULOS DIRIGIDOS

En la sección 1.4 se consideró que un ángulo es el resultado de la rotación de una semirrecta alrededor de su origen, llamado vértice del ángulo. Con referencia a la figura 4.4-1 se puede observar que el segmento OP genera el ángulo θ a medida que el punto P recorre el arco u; *se dice entonces, que el ángulo θ es el ángulo asociado al arco u.*

Usando la fórmula que determina la longitud de un arco de circunferencia $s = r\theta$; (θ medido en radianes), se ve que para un círculo unitario, en donde $r = 1$,

$$s = \theta.$$

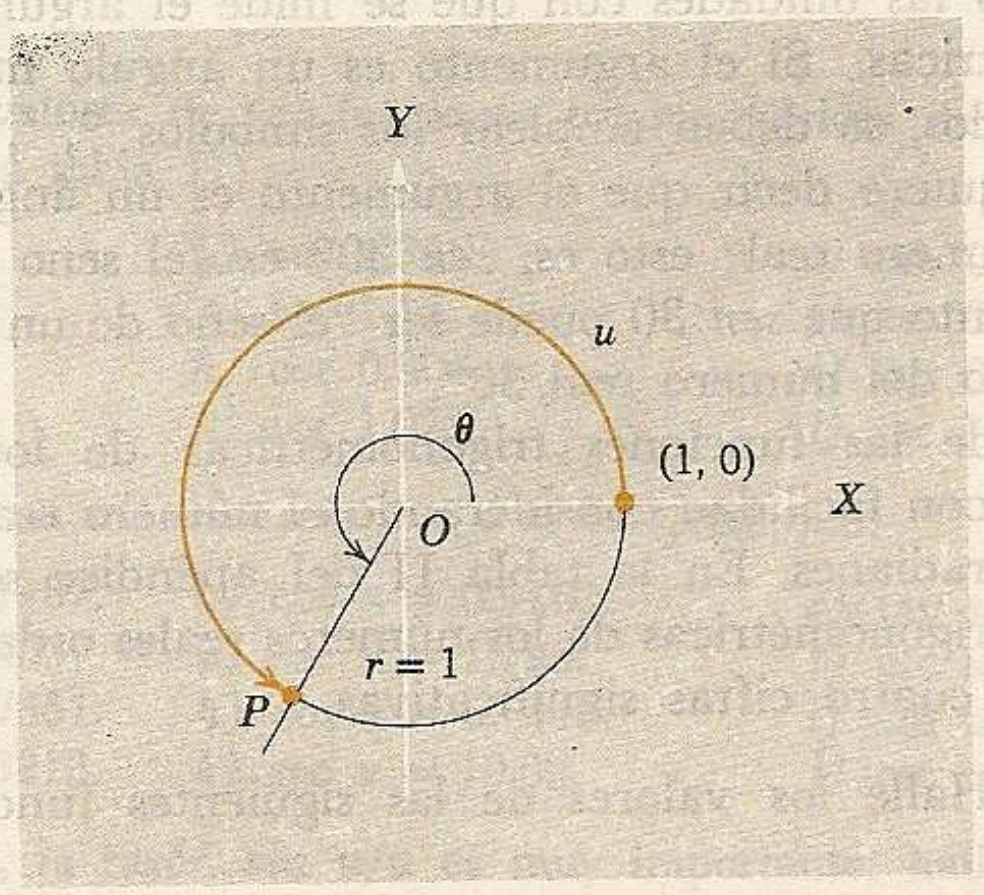


Figura 4.4-1

Si la longitud del arco se representa por u, se puede decir que el ángulo dirigido θ (medido en radianes) asociado a dicho arco del círculo unitario, es igual a la longitud de u. Esto es,

$$\theta = \boldsymbol{u} \ (\theta \text{ en radianes}) \tag{4.4-1}$$

Si el número real u es positivo, entonces θ será positivo; si el número real u es negativo, θ será negativo. Si $u = 0$, entonces $\theta = 0$.

En las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo dirigido, θ, en posición normal, se indicó que sobre el lado terminal del ángulo se puede elegir un punto cualquiera $P(x, y)$, $r \neq 0$. Escojamos ahora P tal que $r = 1$; entonces las definiciones se escriben

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} = y. \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} = x. \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}.$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{1}{y}. \qquad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{1}{x}. \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}.$$

Comparando estas definiciones con las de las funciones trigonométricas de un número real, se ve que

$$\boldsymbol{T(\theta) = T(u),} \tag{4.4-2}$$

donde u es un número real y θ el ángulo dirigido, medido en radianes, asociado al arco u. En consecuencia, todas las fórmulas que se han obtenido para el ángulo θ, así como las que se obtendrán más adelante, son también válidas para el número real u.

De la relación $T(\theta) = T(u)$, se obtiene

$$\operatorname{sen} 180° = \operatorname{sen} \pi \text{ (radianes)} = \operatorname{sen} \pi,$$

$$\tan 3 = \tan 3 \text{ (radianes)} = \tan\left[3\left(\frac{180°}{\pi}\right)\right] = \tan 171.9°:$$

De las dos últimas relaciones se hace evidente la necesidad de expresar con todo cuidado las unidades con que se mide el argumento de las funciones trigonométricas. Si el argumento es un ángulo medido en grados, minutos y segundos, se deben emplear los símbolos °, ′, ″. Si no se usa ningún símbolo quiere decir que el argumento es un ángulo expresado en radianes o un número real; esto es, *sen* 30° es "el seno de un ángulo de 30 grados", en tanto que *sen* 30 puede ser "el seno de un ángulo de 30 radianes" o "el seno del número real 30".

Los valores de las funciones trigonométricas de los números reales se pueden hallar con facilidad considerando el número real como un ángulo expresado en radianes. En la tabla II del apéndice se dan los valores de las funciones trigonométricas de los números reales o de ángulos medidos en radianes, con cuatro cifras significativas.

Ejemplo 1. Halle los valores de las siguientes funciones trigonométricas:

a) sen 0.5; *b)* sec 1.4, *c)* cos 0.623.

Solución: Use la tabla II:

a) **sen 0.5 = 0.4794.**
b) **sec 1.4 = 5.883.**
c) Puesto que 0.623 no aparece en la tabla, se interpola como sigue

$$\begin{array}{ccc} & u & \cos u \\ 10\Big[& 0.620 & 0.8139 \\ 3\Big[& 0.623 & \Big]x \\ & 0.630 & 0.8080 \end{array}\Big]59$$

$$\frac{3}{10} = \frac{x}{59} \text{ ó } x = 17.7 \text{ (redondeando, } x = 18).$$

Por lo tanto:

$$\textbf{cos 0.623 = 0.8121.}$$

Ejemplo 2. Halle en cada caso un número real $0 < u < 1.57$, que corresponda a las funciones trigonométricas:

a) tan $u = 1.369$, *b)* sen $u = 0.4908$.

Solución: Use la tabla II:

a) Si tan $u = 1.369$, entonces $\boldsymbol{u = 0.94}$.
b) 0.4908 no aparece en la columna sen u; interpole como sigue:

$$\begin{array}{ccc} & u & \text{sen } u \\ 10\Big[& 0.510 & 0.4882 \\ x\Big[& & 0.4908\Big]26 \\ & 0.520 & 0.4969 \end{array}\Big]87$$

$$\frac{x}{10} = \frac{26}{87},$$

$$x = 2.9 \text{ (redondeando, } x = 3).$$

Por tanto, para sen $u = 0.4908$, $\boldsymbol{u = 0.513}$.

EJERCICIOS 4.4

1. Halle los valores de las funciones trigonométricas de los siguientes números reales (use la tabla II):

a) sen 0.02.	*b)* cos 1.35.	*c)* tan 0,10.
d) cot 1.00	*e)* sec 1.17.	*f)* csc 0.39.
g) sen 1.327.	*h)* cos 0.906.	*i)* tan 0.235.
j) cot 1.406.	*k)* sec 1.073.	*l)* csc 1.324.

2. Determine un número real $0 < u < 1.57$, tal que:

a) sen $u = 0.1987$.	*b)* cos $u = 0.9460$.	*c)* tan $u = 12.56$.
d) cot $u = 0.4237$.	*e)* sec $u = 1.196$.	*f)* csc $u = 1.552$.
g) sen $u = 0.7351$.	*h)* cos $u = 0.6440$.	*i)* tan $u = 4.056$.
j) cot $u = 0.3218$.	*k)* sec $u = 10.02$.	*l)* csc $u = 12.00$.

3. En cálculo, la razón sen u/u es muy importante; halle el valor de esta razón para los siguientes valores de u:

a) $u = 0.3$; *b)* $u = 0.2$; *c)* $u = 0.1$; *d)* $u = 0.05$;
e) $u = 0.01$; *f)* 0.005.

¿A qué valor tiende la razón sen u/u cuando u tiende a cero?

4. Es necesario algunas veces, en el desarrollo de algunas fórmulas, sustituir tan u por sen u. Diga si esto es válido para toda u; en caso contrario, diga para qué valores de u, sí lo es.

5. Si $f(u) = \dfrac{1 - \cos u}{u}$, halle: *a)* $f(0.2)$; *b)* $f(0.1)$; *c)* $f(0.05)$; *d)* $f(0.01)$.

6. Si $f(u) = \dfrac{\tan u - u}{u - \operatorname{sen} u}$, calcule: *a)* $f(0.2)$; *b)* $f(0.1)$; *c)* $f(0.05)$.

7. Un peso que cuelga de un resorte, tiene su desplazamiento, velocidad y aceleración al tiempo t, dados por las fórmulas

$$s = \tfrac{1}{2}\cos 5t, \qquad v = -\tfrac{5}{2}\operatorname{sen} 5t, \qquad a = -\tfrac{25}{2}\cos 5t,$$

en donde s está en metros, v en m/seg, a en m/seg^2 y t en segundos.

Calcule s, v y a en los siguientes instantes:

a) $t = 0.1$. *b)* $t = 0.2$. *c)* $t = 0.3$.

d) Cuando t crece, s, v y a cambian; diga cuáles son sus valores máximos y mínimos.

8. Suponga que bajo ciertas condiciones, el desplazamiento de una cuerda vibrante está dado por $x = \operatorname{sen} t - t \cos t$. Calcule el desplazamiento x, en metros, para los siguientes tiempos (t, en segundos):

a) $t = 0.01$. *b)* $t = 0.02$. *c)* $t = 0.05$. *d)* $t = 0.1$.
e) $t = 0.15$.

f) ¿Cómo cambia x cuando t crece? ¿Pasa por un máximo? Si es así, diga cuál es.

9. En la ecuación $y = y_0 \cos(\pi x/2L)$, determine y para los valores de x que se dan a continuación, considerando que $L = 120$ cm, $y_0 = 1$ cm.

a) 0 cm; *b)* 10 cm; *c)* 50 cm; *d)* 100 cm; *e)* 120 cm;
f) construya la gráfica de la ecuación.

10. En un círculo de radio r, el área de un segmento limitado por un arco y por la cuerda que subtiende al arco, está dada por $A = \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, en donde θ es el ángulo central asociado al arco. ¿En qué unidades se debe medir θ? Calcule el área de cada segmento para los valores dados de r y θ.

a) $r = 2$, $\theta = 0.5$. *b)* $r = 2$, $\theta = 1.0$.
c) $r = 10$, $\theta = 60°$. *d)* $r = 5$, $\theta = 40°$.
e) Compare *a)* y *b)*. Diga si el área asociada al ángulo doble, también es doble.

11. Las ecuaciones de la cicloide son $x = a(\phi - \operatorname{sen}\phi)$ y $y = a(1 - \cos\phi)$. Si $a = 2$, halle los valores de x y y para los siguientes valores de ϕ:

a) $\phi = 0.05$; *b)* $\phi = 0.1$; *c)* $\phi = 0.3$; *d)* $\phi = 45°$;
e) $\phi = 60°$.

f) Trace la curva en el intervalo $0 \leq \phi \leq \pi/2$; al efecto dé a ϕ valores distantes entre sí $\pi/6$; halle x y y para cada ϕ y construya los puntos.

12. La involuta de un círculo es una curva cuyas ecuaciones son $x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta$ y $y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$. Halle los valores de x y y para:

a) $\theta = 0.1$; *b)* $\theta = 0.2$; *c)* $\theta = 0.4$; *d)* $\theta = 30°$; *e)* $\theta = 50°$; *f)* trace la curva en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi/2$, como se hizo en el problema 11-*f*.

13. El voltaje instantáneo, e, para un sistema eléctrico de 25 ciclos, está dado por la fórmula $e = 110 \text{ sen } 157t$, en donde t está dado en segundos. Calcule el voltaje en cada uno de los instantes siguientes:

a) $t = 0.002$ sec. *b)* $t = 0.005$ sec. *c)* $t = 0.01$ sec.

d) Cuando t crece ¿cuál es el valor máximo de e?

4.5. VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE CUALQUIER NÚMERO REAL

Usando un método análogo al empleado en la sección 2.7, se puede obtener la siguiente regla de reducción para números reales: *toda función trigonométrica de cualquier número real, es numéricamente igual a la misma función trigonométrica de un número real, no negativo, menor que* $\pi/2$, *asociado al arco reducido del número dado.* Para un número real dado, el arco reducido es el arco no negativo, menor que $\pi/2$, comprendido entre el punto terminal del arco asociado al número real, y el eje X. El signo de la función trigonométrica está determinado por el cuadrante del número dado.

Ejemplo 1. Halle los valores de las siguientes funciones trigonométricas.

a) sen $5\pi/6$; *b)* cos $5\pi/6$. *c)* tan 4.00. *d)* cot 8.50. *e)* sen (-5.25).

Solución: Trace los arcos asociados y determine los arcos reducidos.

a) $5\pi/6$ es un arco del segundo cuadrante (figura 4.5-1); por lo tanto, sen $5\pi/6$ es positivo.

El arco reducido es $\pi - 5\pi/6 = \pi/6$; por lo que

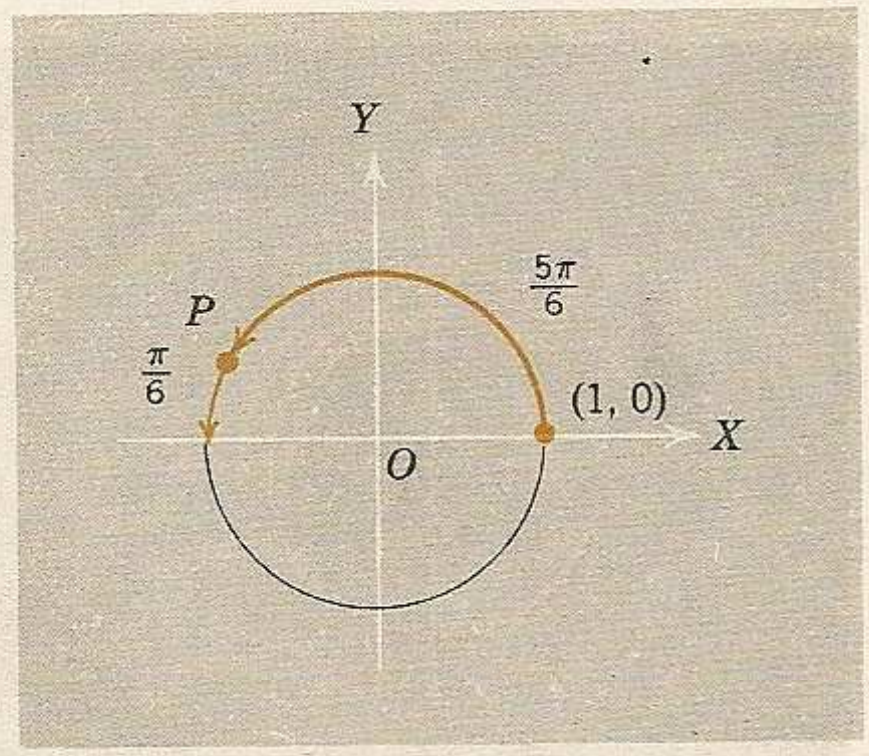


Figura 4.5-1

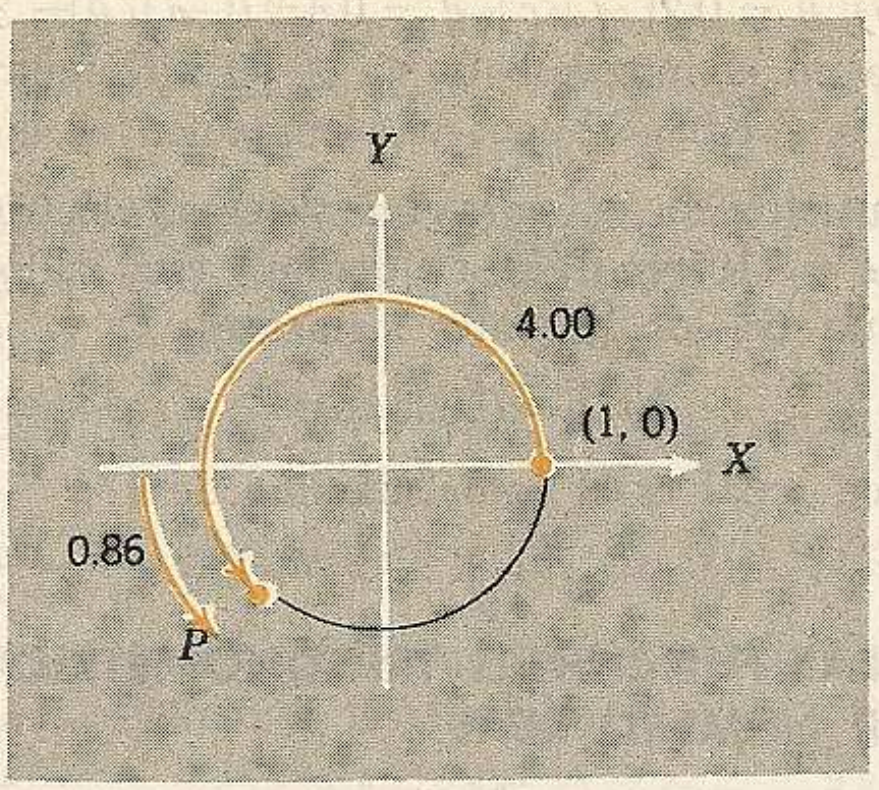


Figura 4.5-2

b) cos $5\pi/6$ será negativo, entonces

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

c) Como 4.00 es un arco del tercer cuadrante (figura 4.5-2), tan 4.00 es positiva. El arco reducido es $4.00 - 3.14 = 0.86$. Por tanto,

$$\tan 4.00 = \tan 0.86 = 1.162.$$

d) Puesto que $8.50 = 6.28 + 2.22$, se trata de un arco del segundo cuadrante (figura 4.5-3) y cot 8.50 es negativa. Entonces,

$$\cot 8.50 = -\cot 0.92 = -0.7615.$$

e) Como $628. - 5.25 = 1.03$, el arco reducido es 1.03 (figura 4.5-4):

$$\text{sen}\,(-5.25) = \text{sen}\,1.03 = 0.8573.$$

EJERCICIOS 4.5

1. Exprese la función trigonométrica que se indica, en términos de la misma función trigonométrica de un número real, no negativo, menor que $\pi/2$.

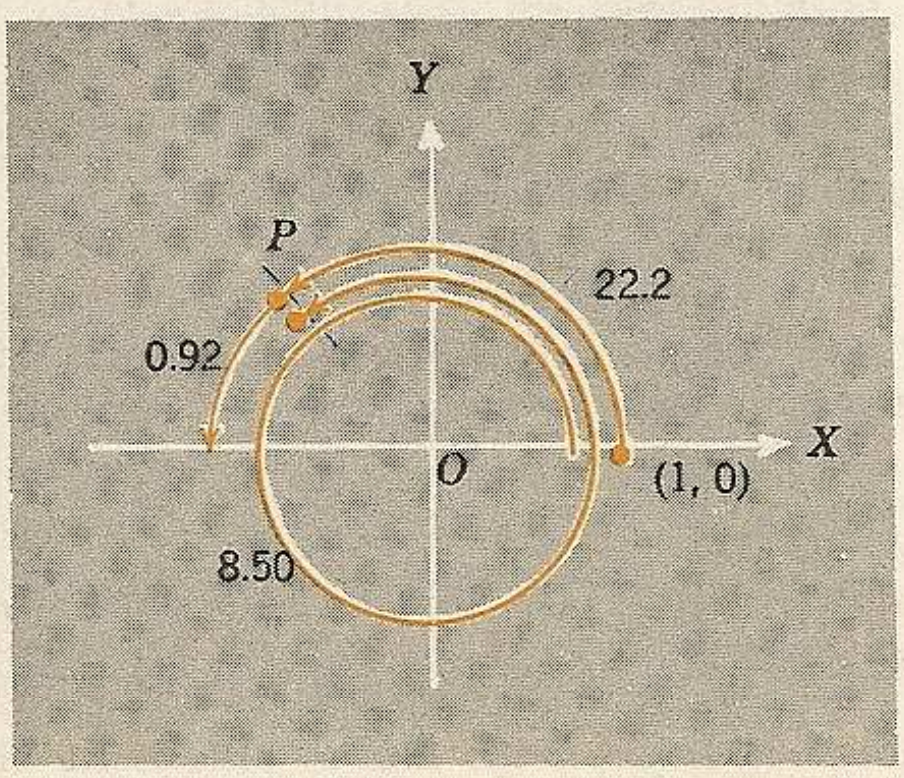


Figura 4.5-3

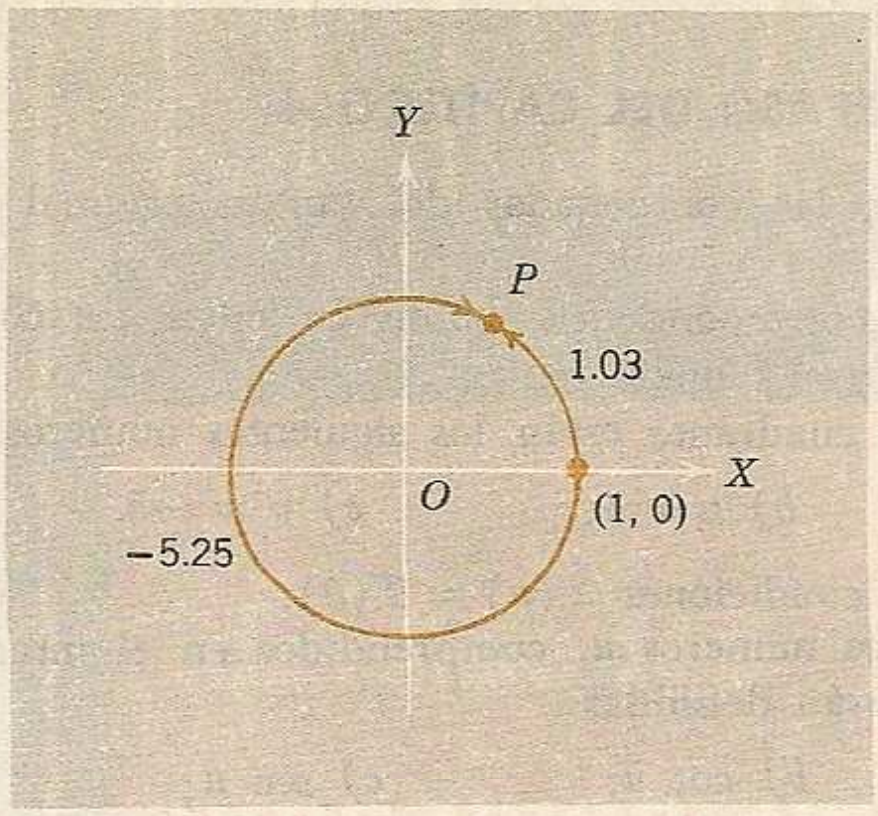


Figura 4.5-4

Recuerde que $\pi/2 = 1.57$, $\pi = 3.14$ y $2\pi = 6.28$, aproximadamente.

a) sen 1.8. *b)* cos 2.8. *c)* tan 3.5. *d)* cot 5.
e) sec 4. *f)* csc 4.8. *g)* sen 30. *h)* tan 10.

2. Use la tabla II para calcular las siguientes funciones trigonométricas:

a) sen 1.98. *b)* tan 2.30. *c)* cos 5.2. *d)* cot 2.53.
e) sen 4.12. *f)* csc 2.05. *g)* sen 30. *h)* tan 45.
i) sen (-1). *j)* cos (-1.8). *k)* tan (-30). *l)* cot (-2.7).

3. Complete la tabla con los valores exactos de las funciones trigonométricas:

u	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen u												
cos u												
tan u												
cot u												
sec u												
csc u												

4. En un circuito eléctrico $i = 8 \operatorname{sen} 377t$. Determine i para *a)* $t = 0.01$; *b)* $t = 0.1$; *c)* $t = 1$; *d)* diga cuáles son los valores máximo y mínimo de i cuando t crece.

5. Para cada uno de los valores dados de ϕ, determine los valores de x y y, si

$$x = 2(\phi - \operatorname{sen}\phi),\ y = 2(1 - \cos\phi).$$

a) $\phi = \pi/6$; *b)* $\pi/2$; *c)* $3\pi/4$; *d)* 180°; *e)* 225°; *f)* 270°; *g)* 315°; *h)* 2π.
i) trace la gráfica de esta cicloide en el intervalo $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$, como se hizo en el ejercicio 4.4-11.

6. Para $x = (1/10) \operatorname{sen} 10t - t \cos 10t$, determinar x, si: *a)* $t = 1$; *b)* $t = 1.5$; *c)* $t = 2$; *d)* diga cómo cambia x cuando t crece.

7. Un cuerpo que cuelga de un resorte vertical se desplaza según la fórmula $x = t \operatorname{sen} t$. El resorte se rompe cuando $x = 2$; diga si se rompe para $t < 2$ y halle t, el instante en que el resorte se rompe.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

1. Halle x y y, las coordenadas del punto terminal del arco asociado a $u = 2\pi/3$.

2. ¿Existe una correspondencia biunívoca entre las coordenadas del punto terminal del arco u y el número real u?

3. Diga en qué cuadrante están los siguientes números reales:

a) $u = 3$; *b)* $u = 4$; *c)* $u = -5$.

4. Diga en qué condiciones $T(u) = T(\theta)$.

5. Liste todos los números u, comprendidos en el intervalo $-2\pi \leqq u \leqq 2\pi$, para los cuales no están definidas:

a) tan u; *b)* cot u; *c)* sec u; *d)* csc u.

6. *a)* Si $0 < u < \pi/2$ y sen $u = 1/4$, halle cos u.

b) Si $\pi/2 < u < \pi$ y cos $u = -\sqrt{3}/3$, halle tan u.

7. Halle

a) tan 1.2; *b)* sen 3.9.

8. Halle u, tal que $\pi < u < 3\pi/2$ para

a) cos $u = -1/2$; *b)* tan $u = \sqrt{3}$; *c)* sen $u = -1/4$.

CAPITULO 5

Identidades fundamentales

5.1. INTRODUCCION

La igualdad $(x-2)(x+2)=0$ es cierta si, y solamente si, $x=2$, ó $x=-2$; en cambio, la igualdad $(x-2)(x+2)\equiv x^2-4$ se cumple para todo valor de x. Las del primer tipo se denominan *ecuaciones condicionales*, o simplemente *ecuaciones*, y las del segundo tipo *identidades*. Para indicar una identidad usaremos el símbolo $\equiv$, que se lee: "idéntico a". Las ecuaciones condicionales son ciertas sólo para valores particulares de la variable, en tanto que las identidades lo son para *todos* los valores de la *variable, para los cuales la igualdad tiene sentido*. Recuerde que no existe la división entre cero.

Ejemplo 1. $x^2-x-2\equiv(x-2)(x+1)$, es cierta para toda x.

Ejemplo 2. $\dfrac{1}{x-2}+x\equiv\dfrac{1+x^2-2x}{x-2}$ es cierta para todos los valores de x excepto $x=2$. (¿Por qué?)

5.2. OCHO IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Para las funciones trigonométricas existen ocho identidades fundamentales, que pueden ordenarse en tres grupos: de *recíprocos*, de *división* y de *cuadrados*. Todas son importantes en análisis trigonométrico y se recomienda que el lector las *memorice*; obviamente, dichas relaciones son *válidas* únicamente cuando las expresiones consideradas *tienen significado*. Para la deducción de dichas identidades se usarán las definiciones de las funciones trigonométricas de los números reales, pero también se cumplen para las funciones trigonométricas de los ángulos.

Identidades de recíprocos*

(5.2-1) $\quad \operatorname{sen} u \csc u \equiv 1,$

(5.2-2) $\quad \cos u \sec u \equiv 1,$

(5.2-3) $\quad \tan u \cot u \equiv 1.$

NOTA: En realidad son sólo 5 identidades fundamentales; la 5.2-5 se deduce de 5.2-4 y la 5.2-7 y 5.2-8 de la 5.2-6 dividiendo entre $\cos^2 u$ y $\operatorname{sen}^2 u$ respectivamente.

Identidades de división

(5.2-4) $\quad \tan u \equiv \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cos u},$

(5.2-5) $\quad \cot u \equiv \dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}.$

Identidades de cuadrados o Pitagóricas

(5.2-6) $\quad \operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u \equiv 1,$

(5.2-7) $\quad 1 + \tan^2 u \equiv \sec^2 u,$

(5.2-8) $\quad 1 + \cot^2 u \equiv \csc^2 u.$

* Se dice que dos números son *recíprocos* si su producto es igual a la unidad.

La demostración de estas identidades se efectúa aplicando las definiciones de las funciones trigonométricas de los números reales. Por ejemplo si $\operatorname{sen} u = y$, $\csc u = 1/y$ $(y \neq 0)$, entonces $\operatorname{sen} u \csc u \equiv 1$. Las demás identidades de recíprocos y las de división, se dejan como ejercicio al estudiante.

La identidad $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u \equiv 1$ se demuestra sustituyendo $x = \cos u$ y $y = \operatorname{sen} u$ en la ecuación de la circunferencia unitaria $y^2 + x^2 = 1$. Así. $(\operatorname{sen} u)^2 + (\cos u)^2 \equiv 1$, ó

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u \equiv 1.}$$

(Cuando una función trigonométrica se eleva a una potencia, el exponente se escribe al final de la abreviatura de la función). Las identidades 5.2-7 y 5.2-8 deberán ser comprobadas por el estudiante.

Es conveniente recordar que los símbolos de las funciones trigonométricas representan números, tal como ocurre con los símbolos a, x, y, t, etc., por lo que los métodos algebraicos se aplican por igual a las funciones trigonométricas. De esta manera, las identidades anteriores se pueden escribir de diferentes modos: por ejemplo, $\textit{sen}\, u \equiv 1/\textit{csc}\, u$ y $\textit{sen}\, u \equiv \pm\sqrt{1 = \textit{cos}^2\, u}$, en donde el signo depende del cuadrante de u. En consecuencia, cualquier expresión trigonométrica se puede escribir en términos de *sen* u o de cualquier otra función trigonométrica.

Ejemplo. Exprese $\dfrac{\sec^2\theta - 1}{\operatorname{sen}^2\theta}$ $(\operatorname{sen}\theta \neq 0)$, en términos de sen θ solamente.

Solución:

$$\frac{\sec^2\theta - 1}{\operatorname{sen}^2\theta} \equiv \frac{\dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1}{\operatorname{sen}^2\theta}. \qquad \text{[Relación (5.2-2)]}$$

$$\equiv \frac{1 - \cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}, \qquad \text{(Simplificando fracciones)}$$

$$\equiv \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta}, \qquad \text{[Relación (5.2-6)]}$$

$$\equiv \frac{1}{\cos^2\theta}, \qquad \text{(Simplificando)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\sec^2\theta - 1}{\operatorname{sen}^2\theta} \equiv \frac{1}{1 - \operatorname{sen}^2\theta}.} \qquad \text{[Relación (5.2-6)]}$$

EJERCICIOS 5.2

1. Enuncie con palabras las ocho identidades fundamentales.

2. Escriba de otras dos maneras, cada una de las identidades fundamentales. (Por ejemplo, para la ecuación 5.2-2, con $u \equiv 1/\sec u$, y $\sec u \equiv 1/\cos u$).

3. Compruebe las identidades, *a)* de recíprocos, *b)* de división, *c)* de cuadrados.

4. Reduzca las expresiones siguientes a una sola función del argumento dado. (Los denominadores de las fracciones son diferentes de cero).

a) $\dfrac{\cot u \sec^2 u}{1 + \cot^2 u}$.

b) $\dfrac{\csc u}{\cot u + \tan u}$.

c) $\dfrac{1 + \cot^2 B}{\sec^2 B}$.

d) $\dfrac{\cot A \cos A}{\sec^2 A - 1}$.

e) $\dfrac{1 + \cot^2 A}{\cot A \sec^2 A}$.

f) $\dfrac{\csc^2 x - 1}{\csc x \cos^2 x}$.

g) $\operatorname{sen} \theta \, (\cot^2 \theta + 1)$.

h) $\dfrac{\csc^2 v + \sec^2 v}{\csc^2 v \sec v}$.

i) $\cot u \, (\cos u + \tan u \operatorname{sen} u)$.

j) $\dfrac{1}{\cos A \operatorname{sen} A} - \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$.

k) $1 + \dfrac{\cot^2 B}{1 + \csc B}$.

l) $\dfrac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A} + 1 + \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$.

m) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} u \cos u} - \dfrac{1}{\tan u}$.

n) $\dfrac{1 + \tan^2 v}{\sec^3 v}$.

5. Deduzca las identidades fundamentales usando las definiciones de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal.

6. Exprese todas las funciones trigonométricas en términos de *a)* sen u; *b)* cos u; *c)* tan u.

Para los problemas del 7 al 9, considere que a y b son no negativos y que u queda en el primer cuadrante. Después de estudiar el capítulo 10 se hará evidente la necesidad de tales restricciones.

7. *a)* Muestre que si $\tan u = b/a$, $\sqrt{a^2 + b^2} = a \sec u$.

b) Evalúe $\sqrt{64 + 10}$, de acuerdo con el inciso *a)*.

c) Halle un valor aproximado de $\sqrt{89}$. (*Sugestión*: $89 = 64 + 25$).

d) Halle un valor aproximado de $\sqrt{125}$.

8. Mediante el uso de sustituciones trigonométricas es posible simplificar muchas expresiones algebraicas. Verifique las siguientes:

a) $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$, donde $x = a \operatorname{sen} u$.

b) $\sqrt{a^2 + x^2} = a \sec u$, donde $x = a \tan u$.

c) $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan u$, donde $x = a \sec u$.

d) $\sqrt{49 + 16x^2} = 7 \sec u$, donde $x = \dfrac{7}{4} \tan u$.

9. Usando las sustituciones que se indican, reduzca las expresiones dadas a otras que contengan únicamente funciones trigonométricas.

a) $(25 - x^2)^{5/2}$; sea $x = 5 \operatorname{sen} u$.

b) $(25 + x^2)^{5/2}$; sea $x = 5 \tan u$.

c) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$; sea $x = 3 \sec u$.

d) $\dfrac{\sqrt{9 - 25x^2}}{x}$ sea $x = \dfrac{3}{5} \operatorname{sen} u$.

e) $x^3 \sqrt{9 + 16x^2}$; sea $x = \frac{3}{4} \tan u$.

5.3. IDENTIDADES ELEMENTALES

La comprobación de una identidad, implica que el primer miembro se puede reducir al segundo o viceversa, o que cada miembro por separado se puede reducir a una misma forma. La verificación de identidades se efectúa usando las relaciones fundamentales y las operaciones algebraicas tales como la adición de fracciones, la factorización y la multiplicación, evitando la división entre cero y la introducción de radicales.

No existe, desgraciadamente, una regla única que sirva como norma para verificar identidades. Por lo general, de los dos miembros se procura reducir el más complicado al más simple; al efecto, el estudiante debe tener presente la expresión a la que pretende llegar, pensar en todas las relaciones fundamentales y seleccionar aquellas que le permitan obtener la expresión deseada. Algunas veces es útil escribir la identidad en términos de senos y cosenos. De cualquier manera, lo que se requiere es mucha práctica y familiaridad con las relaciones fundamentales; a continuación se dan algunos ejemplos.

La comprobación de identidades contribuye al dominio de las relaciones fundamentales por parte del estudiante, al mismo tiempo que realiza una revisión de las operaciones algebraicas; las técnicas que así se aprendan serán de gran utilidad en cursos futuros.

Ejemplo 1. Verifique la identidad

$$\csc u \equiv \frac{\cot u}{\cos u}$$

Solución: El segundo miembro es el más complicado de los dos. El primer miembro sugiere de inmediato la función sen u; ¿puede obtener sen u a partir del segundo miembro?

Sustituya cot u por $\dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$; se obtiene

$$\csc u \equiv \frac{\dfrac{\cos u}{\operatorname{sen} u}}{\cos u}:$$

Efectuando la división indicada en el segundo miembro.

$$\csc u \equiv \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} \cdot \frac{1}{\cos u} \equiv \frac{1}{\operatorname{sen} u}, \text{ ó}$$

$$\mathbf{csc}\ \boldsymbol{u} \equiv \mathbf{csc}\ \boldsymbol{u}.$$

Ejemplo 2. Verifique la identidad

$$\frac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A} + \frac{\cos A}{1 - \operatorname{sen} A} \equiv 2 \sec A.$$

Solución: Reduzca el primer miembro a un común denominador:

$$\frac{\cos A(1 - \operatorname{sen} A) + \cos A(1 + \operatorname{sen} A)}{(1 + \operatorname{sen} A)(1 - \operatorname{sen} A)} \equiv 2 \sec A.$$

Multiplicando y simplificando, se tiene

$$\frac{\cos A - \cos A \operatorname{sen} A + \cos A + \cos A \operatorname{sen} A}{1 - \operatorname{sen}^2 A} \equiv 2 \sec A,$$

$$\frac{2 \cos A}{\cos^2 A} \equiv 2 \sec A,$$

$$\frac{2}{\cos A} \equiv 2 \sec A,$$

ó $$\mathbf{2 \sec A \equiv 2 \sec A.}$$

Ejemplo 3. Verifique la identidad

$$\csc^4 u - \cot^4 u \equiv \csc^2 u + \cot^2 u.$$

Solución: El primer miembro sugiere una factorización:

$$(\csc^2 u + \cot^2 u)(\csc^2 u - \cot^2 u) \equiv \csc^2 u + \cot^2 u$$

y como

$$\csc^2 u - \cot^2 u \equiv 1 \text{ (vea la fórmula 5.2-8)},$$

$$\mathbf{\csc^2 u + \cot^2 u \equiv \csc^2 u + \cot^2 u.}$$

Ejemplo 4. Verifique la identidad.

$$\frac{1}{\csc \alpha + \cot \alpha} \equiv \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Solución: Multiplique numerador y denominador del primer miembro por $\csc \alpha - \cot \alpha$, se obtiene

$$\frac{\csc \alpha - \cot \alpha}{\csc^2 \alpha - \cot^2 \alpha} \equiv \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Usando la relación fundamental

$$1 + \cot^2 \alpha \equiv \csc^2 \alpha,$$

obtenga

$$\frac{\csc \alpha - \cot \alpha}{1} \equiv \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Reescriba el primer miembro como

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \equiv \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha},$$

Y así $$\mathbf{\frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} \equiv \frac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.}$$

EJERCICIOS 5.3

Verifique las siguientes identidades para los valores permisibles del argumento

1. $\operatorname{sen}^2 u(1 + \cot^2 u) \equiv 1.$

2. $\cos^2 u(1 + \tan^2 u) \equiv 1.$

3. $\sec^2 A(1 - \operatorname{sen}^2 A) \equiv 1.$

4. $\dfrac{2\cos u(1 - \cos^2 u)}{2 \operatorname{sen} u \cos u} \equiv \operatorname{sen} u.$

5. $\dfrac{\csc u + \cot u}{\operatorname{sen} u + \tan u} \equiv \csc u \cot u.$

6. $\dfrac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} \equiv \sec \theta - \tan \theta.$

7. $\operatorname{sen}^2 x(1 - \csc^2 x) \equiv \cos^2 x.$

8. $\dfrac{\tan u + \sec u}{\cot v - \csc v} \equiv \dfrac{\cot v + \csc v}{\tan u - \sec u}.$

9. $\cot B + \tan B \equiv \sec B \csc B.$

10. $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta} \equiv \dfrac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}.$

11. $\dfrac{1 - \operatorname{sen} A}{\cos A} \equiv \dfrac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A}.$

12. $\dfrac{\cos \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} - \tan \theta \equiv \sec \theta.$

13. $\sec A - \dfrac{\cos A}{1 + \operatorname{sen} A} \equiv \tan A.$

14. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} B} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} B} \equiv 2 \sec^2 B.$

15. $\dfrac{\cot \theta + \csc \theta \cos \theta}{\cot \theta} \equiv 2.$

16. $2 \cos^2 A(\cot^2 A + 1) \equiv \csc^2 A + \cot^2 A - 1.$

17. $\csc^2 A + \sec^2 A \equiv \csc^2 A \sec^2 A.$

18. $\dfrac{\cot B}{\sec B - \tan B} - \dfrac{\cos B}{\sec B + \tan B} \equiv \operatorname{sen} B + \csc B.$

19. $\dfrac{2 + \csc A}{\sec A} - 2 \cos A \equiv \cot A.$

20. $\dfrac{\sec^2 \alpha \tan^2 \alpha}{\sec^4 \alpha + \tan^4 \alpha} \equiv \dfrac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\cos^4 \alpha + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha}.$

21. $\dfrac{\tan u \operatorname{sen} u}{\tan u + \operatorname{sen} u} \equiv \dfrac{\tan u - \operatorname{sen} u}{\tan u \operatorname{sen} u}.$

22. $\dfrac{\sec^4 A + \tan^4 A}{\sec^2 A \tan^2 A} \equiv \dfrac{\cos^4 A}{\operatorname{sen}^2 A} + 2.$

23. $\dfrac{\cot u + \csc u}{\operatorname{sen} u - \cot u - \csc u} + \sec u \equiv 0.$

24. $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} A \tan A + \cos A \cot A + \cos A \equiv \csc A + \sec A.$

25. $\tan^2 u - \operatorname{sen}^2 u \equiv \tan^2 u \operatorname{sen}^2 u.$

26. $\cot^2 \theta \sec^2 \theta \equiv 1 + \cot^2 \theta.$

27. $\dfrac{\sec \theta + \csc \theta \cot \theta}{\sec^2 \theta} \equiv \cot \theta \csc \theta.$

28. $\dfrac{\cot \theta + \tan \theta}{1} \equiv \dfrac{1}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}.$

29. $(1 - \cot \theta)^2 (1 + \cot \theta)^2 + 4 \cot^2 \theta \equiv \csc^4 \theta.$

30. $\dfrac{\cot u - \cot v}{1 + \cot u \cot v} \equiv \dfrac{\tan v - \tan u}{\tan v \tan u + 1}.$

Desafío:

Si bien es importante comprobar cada identidad, cabría preguntarse cómo fué que el autor logró poner cada una a resolver, es decir, ¿podría el lector crear alguna distinta, que sea válida, a las que se leen aquí?

Opere sobre ambos miembros en las identidades fundamentales y obtendrá nuevas identidades, tratando de encontrar distintas a las de aquí (sea original)

31. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x - \cos^2 x}{\cos x\,(1 + \operatorname{sen} x)} \equiv \tan x.$

32. $\dfrac{\cot \alpha + \cot \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} + \dfrac{1 - \cot \alpha \cot \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \equiv 0.$

33. $(\tan \theta - \cot \theta)^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \equiv 1 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta.$

34. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 u}{\tan u - \operatorname{sen} u} \equiv \dfrac{\operatorname{sen}^2 u \cos u}{1 - \cos u}.$

35. $\dfrac{\cot \theta - \csc \theta + 1}{\cot \theta + \csc \theta - 1} \equiv \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta}.$

36. $(\cot u - \tan u) \equiv \sec u \csc u (1 - 2 \operatorname{sen}^2 u).$

37. $\dfrac{\operatorname{sen}^6 \theta - \cos^6 \theta}{2 \operatorname{sen}^2 \theta - 1} \equiv 1 - \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta.$

38. $\dfrac{\cos^3 x + \sec^3 x}{\cos x + sec\ x} \equiv \sec^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$

39. $(\operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v)^2 + (\cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)^2 \equiv 1.$

40. $\sec^2 x \cot^2 x - \cos^2 x \csc^2 x \equiv 1.$

41. $(1 + \tan x + \cot x)(\cos x - \operatorname{sen} x) \equiv \dfrac{\csc x}{\sec^2 x} - \dfrac{\sec x}{\csc^2 x}.$

42. $\operatorname{sen}^6 A + \cos^6 A \equiv 1 - 3 \operatorname{sen}^2 A \cos^2 A.$

43. $1 - \cos \theta \equiv (1 + \cos \theta)(\csc \theta - \cot \theta)^2.$

44. $\operatorname{sen}^2 B \tan^2 B + \cos^2 B \cot^2 B \equiv \tan^2 B + \cot^2 B - 1.$

45. $(1 + \operatorname{sen} u + \cos u)^2 \equiv 2(1 + \operatorname{sen} u)(1 + \cos u).$

46. $\dfrac{\operatorname{sen} u}{\cot u + \csc u} - \dfrac{\operatorname{sen} u}{\cot u - \csc u} \equiv 2.$

47. $\operatorname{sen}^4 v - \cos^4 v \equiv 1 - \dfrac{2 \cot^2 v}{\csc^2 v}$

48. $\dfrac{\cot A}{\sec A - \tan A} - \dfrac{\cos A}{\sec A + \tan A} \equiv \csc A + \operatorname{sen} A.$

49. $(\csc u + \cot u - 1)(\csc u - \cot u + 1) \equiv 2 \cot u.$

50. $\operatorname{sen}^2 A + 2 \cos^2 A + \cos^2 A \cot^2 A \equiv \csc^2 A.$

5.4. ELIMINACIÓN TRIGONOMÉTRICA DE PARÁMETROS

Si x es una función de la variable t, y y es también función de t, se dice entonces que el par de ecuaciones

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases}$$

son *ecuaciones paramétricas* y que t es un **parámetro.** Las ecuaciones paramétricas son de especial importancia en el estudio de la posición de un móvil o una partícula, cuando dicha posición es función del tiempo, por ejemplo, cuando se desea determinar la posición de un proyectil después de cierto tiempo de haber sido disparado. Para construir una curva, dada por sus ecuaciones paramétricas, generalmente es útil eliminar el parámetro para obtener una ecuación en términos de x y y, llamada *ecuación cartesiana de la curva.* Si la función de t es una función trigonométrica, la eliminación de t se facilita mediante el uso de las identidades

trigonométricas. Evidentemente, existen diferentes métodos para resolver problemas de ese tipo. A continuación se muestran algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Elimine t entre las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

Solución: Puesto que las ecuaciones contienen a cos t y sen t, conviene usar $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \equiv 1$. En consecuencia, divida entre a para obtener

$$\frac{x}{a} = \cos t,$$

$$\frac{y}{a} = \operatorname{sen} t.$$

Eleve ahora al cuadrado:

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t.$$

$$\frac{y^2}{a^2} = \operatorname{sen}^2 t.$$

y sume:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t.$$

como

$$\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \equiv 1,$$

se tiene

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = a^2.}$$

Ejemplo 2. Elimine t entre las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \sec t, \\ y = -1 + 2 \tan t. \end{cases}$$

Solución: Recuerde que $\sec^2 t - \tan^2 t \equiv 1$, y reescriba las ecuaciones en la forma

$$\frac{x - 2}{3} = \sec t,$$

$$\frac{y + 1}{2} = \tan t,$$

Eleve al cuadrado

$$\frac{(x - 2)^2}{9} = \sec^2 t,$$

$$\frac{(y + 1)^2}{4} = \tan^2 t.$$

y ahora reste

$$\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 1)^2}{4} = \sec^2 t - \tan^2 t.$$

Resulta

$$\boldsymbol{\frac{(x - 2)^2}{9} - \frac{(y + 1)^2}{4} = 1.}$$

Esta ecuación es la de una curva denominada *hipérbola*, que se estudia en geometría analítica.

Ejemplo 3. Elimine t entre las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 2 \operatorname{sen} t \cos t. \end{cases}$$

Solución: De la relación fundamental $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \equiv 1$, se tiene

$$\operatorname{sen} t \equiv \pm \sqrt{1 - \cos^2 t}.$$

Sustituya $\cos t$ por x;

$$\operatorname{sen} t = \pm \sqrt{1 - x^2}.$$

Entonces

$$y = 2(\pm \sqrt{1 - x^2})\,(x).$$

De donde

$$y^2 = 4(1 - x^2)\,(x^2),$$

o

$$y^2 = 4x^2 - 4x^4.$$

EJERCICIOS 5.4

En las ecuaciones paramétricas siguientes, elimine t para obtener la ecuación cartesiana.

1. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 3 \operatorname{sen} t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} t, \\ y = 3 \cos t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 4 \tan t, \\ y = 2 \sec t. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \operatorname{sen}^3 t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t, \\ y = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = h + a \cos t, \\ y = k + a \operatorname{sen} t. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \csc t, \\ y = 2 - \cot t. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \sec t, \\ y = \tan t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \operatorname{sen} t \cos t. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} t, \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = 9 \cos^4 t, \\ y = 9 \operatorname{sen}^4 t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 2 \cot t, \\ y = 2 \operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t, \\ y = \tan t(1 + \operatorname{sen} t). \end{cases}$

✳ **15.** $\begin{cases} x = \csc t - \operatorname{sen} t, \\ y = \sec t - \cos t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = 2 \operatorname{sen} t + \cos t, \\ y = 2 \cos t - \operatorname{sen} t. \end{cases}$

17. Las ecuaciones paramétricas

El 15 está muy difícil.

$$\begin{cases} x = a \cos\left(t \sqrt{\dfrac{k}{m}}\right), \\ y = v_0 \sqrt{\dfrac{m}{k}} \operatorname{sen}\left(t \sqrt{\dfrac{k}{m}}\right). \end{cases}$$

son las soluciones de las ecuaciones diferenciales de una partícula de masa m atraída hacia el origen por una fuerza proporcional a la distancia; a, v_0, k y m son constantes. Elimine t y obtenga la ecuación cartesiana de la trayectoria.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5.

1. Diga el significado de *identidad trigonométrica.*

2. *a)* Enliste las identidades de cuadrados.
b) Enliste las identidades de recíprocos.
c) Enliste las identidades de división.

3. Reduzca cada una de las siguientes expresiones a una función única del argumento dado

a) $\dfrac{\csc^2 A}{1 + \tan^2 A}$. *b)* $\dfrac{\sec^2 u - 1}{\sec u \operatorname{sen}^2 u}$.

4. Pruebe que $\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u \equiv 1$.

5. Use la trigonometría para hallar el valor aproximado de $\sqrt{41}$.

6. Verifique cada una de las siguientes identidades

a) $\left|\sqrt{\dfrac{1 - \cos u}{1 + \cos u}}\right| \equiv |\csc u - \cot u|$.

b) $\dfrac{\cos^2 v \csc^2 v + 1}{1 + \cot^2 v} \equiv 1$.

7. Elimine t entre

$$\begin{cases} x = 2 + 3 \cos t, \\ y = -3 + 4 \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

8. Construya la gráfica representada por

$$\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4 \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

CAPITULO 6

Variaciones y gráficas de las funciones trigonométricas

6.1. VARIACION DE sen θ y cos θ

Se ha visto que para ángulos diferentes las funciones trigonométricas toman valores diferentes. En este capítulo veremos cómo es la variación de las funciones cuando varía el ángulo; al efecto, considere un punto P sobre el lado terminal de un ángulo cualquiera θ colocado en posición normal, a la distancia r del origen. A medida que el ángulo θ crece de 0° a 360°, el lado terminal efectúa una revolución completa y el punto P describe una circunferencia de radio r. Como P puede ser cualquier punto del lado terminal de θ, escoja $r = 1$; se tiene así una circunferencia unitaria (figura 6.1-1).

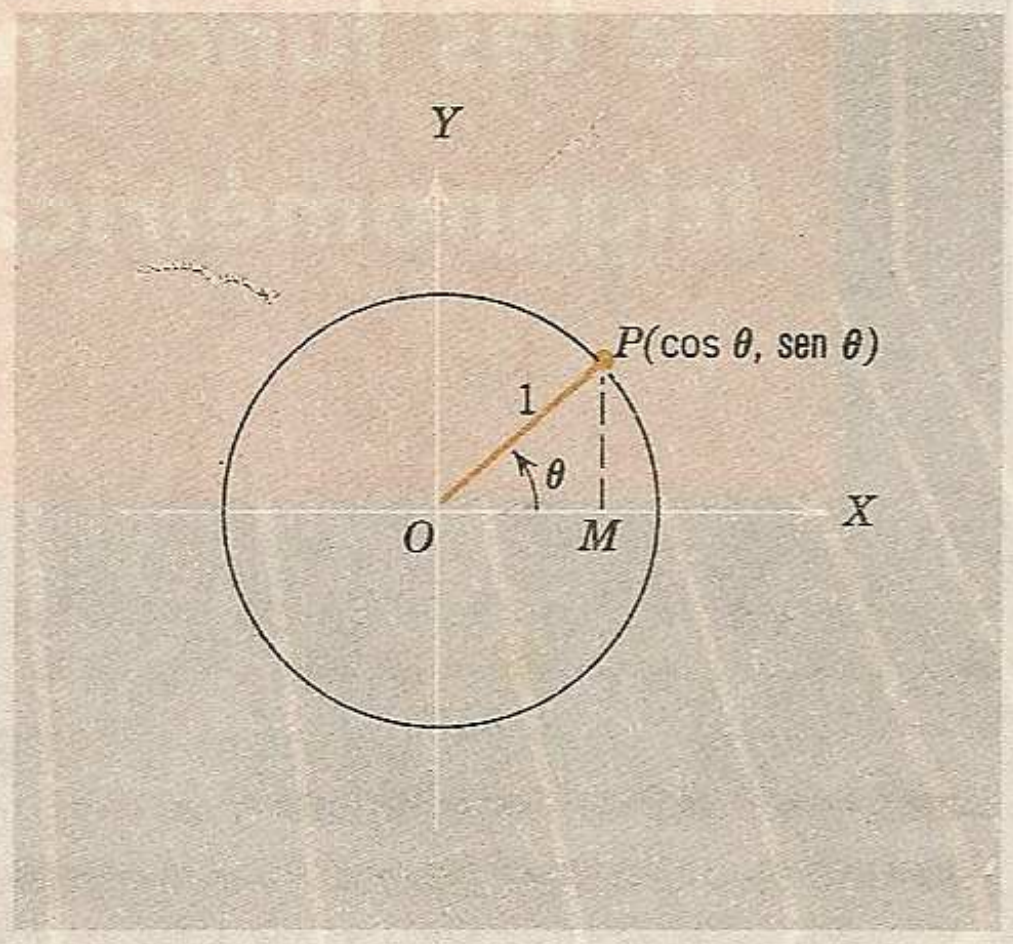


Figura 6.1-1

Las coordenadas de P son (cos θ, sen θ); esto es, $OM = \cos\theta$ y $MP = \text{sen}\,\theta$.

Los valores que aparecen en la tabla 6.1 son evidentes a medida que θ varía de 0° a 360° en sentido levógiro; además de acuerdo con lo expuesto en el artículo 2.7, solamente es necesario considerar una revolución.

Los valores de sen θ y cos θ se repiten en el mismo orden a medida que θ efectúa una o más revoluciones. Cuando una función posee esa

TABLA 6.1 Recorrido de sen θ y cos θ

Dominio de la función: Cuando θ crece de	sen θ	cos θ
0° a 90°	crece de 0 a 1,	decrece de 1 a 0.
90° a 180°	decrece de 1 a 0,	decrece de 0 a −1.
180° a 270°	decrece de 0 a −1,	crece de −1 a 0.
270° a 360°	crece de −1 a 0,	crece de 0 a 1.

propiedad se dice que es *periódica*. En consecuencia, las funciones seno y coseno son periódicas, con período de 360° ó 2π radianes. Si $f(x) = f(x + p)$, para toda x, y p es el menor número positivo para el cual dicha relación es válida, entonces $f(x)$ es una función *periódica* de período p.

EJERCICIOS 6.1

1. Discuta el recorrido de sen u y de cos u, cuando u va de 0 a 2π. Indique claramente los valores máximos y mínimos de sen u y cos u.

2. Escriba todas las funciones trigonométricas en términos de sen θ y discuta el recorrido de cada función, tomando en consideración el de sen θ.

6.2. GRAFICA DE Y = SEN X

La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ proporciona una representación de la función sen x. El argumento x, un número real, va a ser la abscisa de un punto cualquiera de la gráfica. Si se usa un círculo unitario, la ordenada de cualquier punto de la circunferencia será $f(x) = \operatorname{sen} x$, la imagen de x bajo f.

La elección de una escala apropiada para las abscisas se hace considerando la ecuación $s = rx$, sección 1.5, en donde s es la longitud del arco y x es el ángulo en el centro. Para el círculo unitario, en donde $r = 1$, $s = x$, o sea que las abscisas son iguales a las longitudes de arco.

Para construir la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, proceda como sigue (figura 6.2-1):

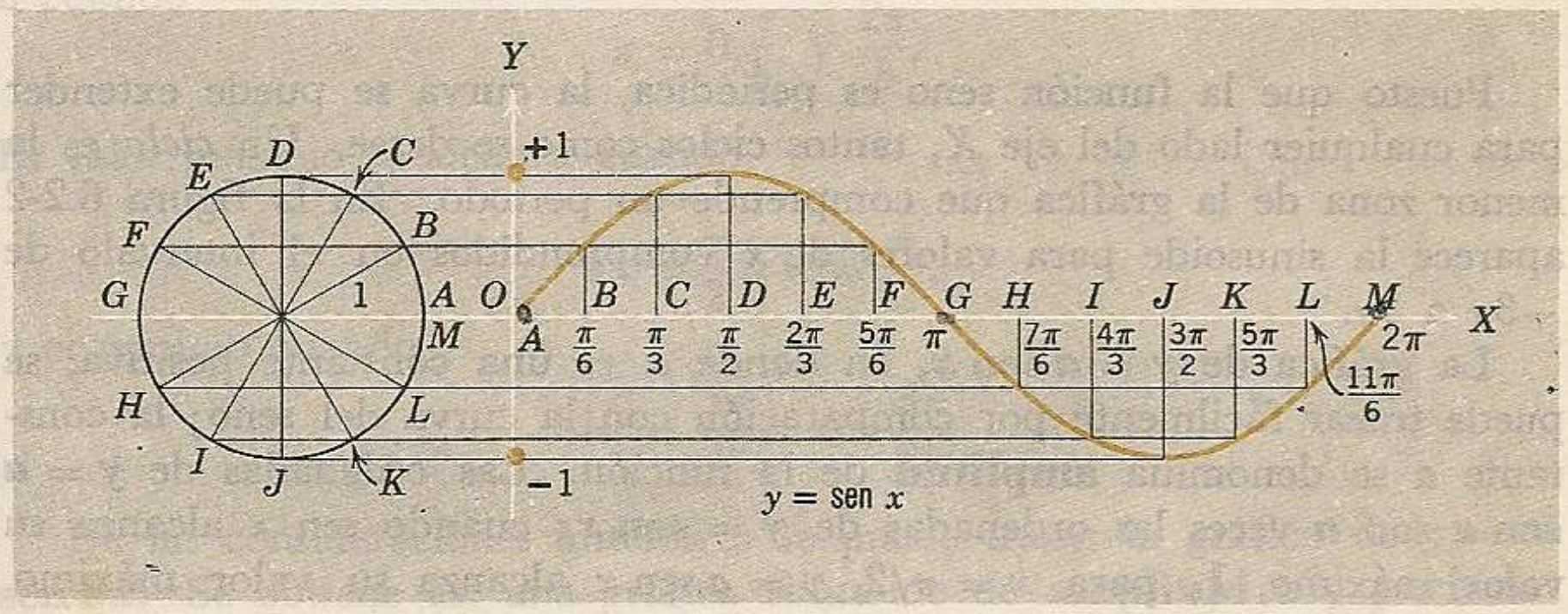


Figura 6.2-1

1. Trace un círculo unitario y un sistema de ejes coordenados. Tome el eje horizontal o eje X pasando por el centro y el eje Y a la derecha del círculo.

2. Divida la circunferencia en 12 partes iguales, por comodidad y rotúlelas como se muestra en la figura.

3. Sobre el eje X trace una escala; represente $\overset{\frown}{ADG} = \pi$, del círculo unitario, por la longitud $AG = \pi$ sobre el eje X. Como $\pi = 3.14$, AG es

3.14 veces mayor que el radio del círculo. De manera análoga, $\widehat{AB}$ = longitud $AB = \pi/6$; $\widehat{AD}$ = longitud $AD = \pi/2$; $\widehat{ADGJ}$ = longitud $AJ = 3\pi/2$ y así sucesivamente. La escala en el eje Y queda determinada por el radio del círculo unitario.

4. Por B, del círculo unitario, trace un horizontal que corte a la vertical que pasa por B del eje X; la ordenada de este punto vale sen $(\pi/6)$. Repita el procedimiento para los otros puntos, como se muestra en la figura.

5. Trace una curva continua que pase por los puntos localizados en el paso anterior y obtenga así la gráfica deseada. Esta gráfica se denomina sinusoide o *senoide* y permite calcular los valores de sen x comprendidos entre los valores de x que se utilizaron para la construcción de la gráfica.

En la figura 6.2-1 se observa que la curva corta al eje X en los puntos $x = 0$, $x = \pi$ y $x = 2\pi$, en tanto que su punto más alto corresponde a $x = \pi/2$, y su punto más bajo a $x = 3\pi/2$.

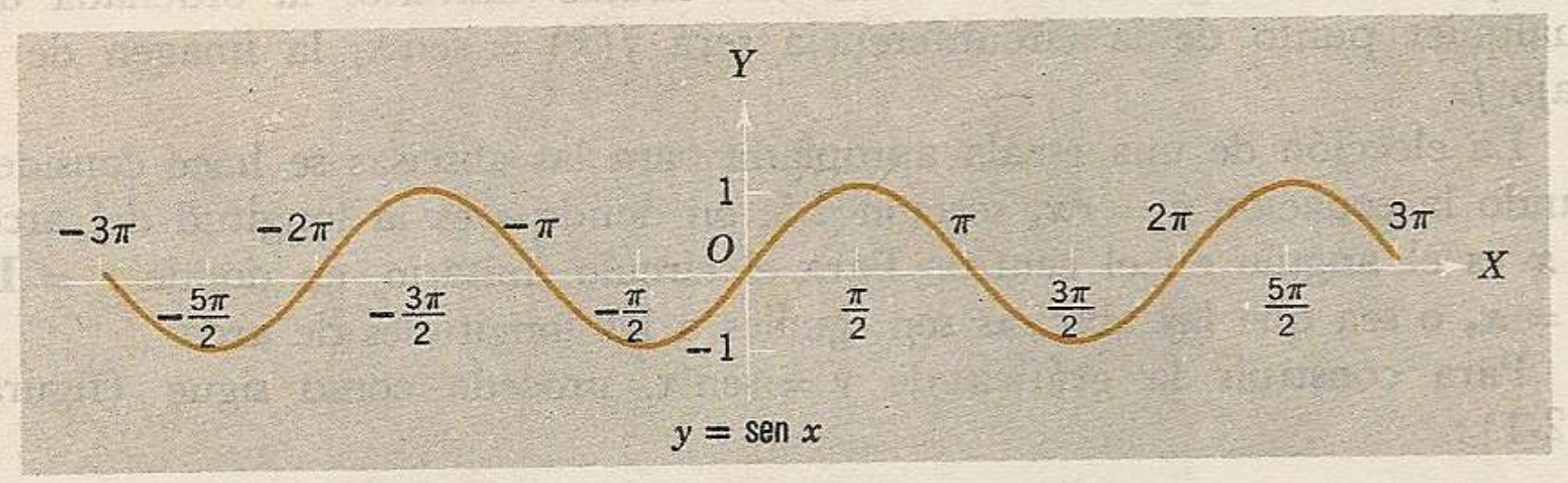


Figura 6.2-2

Puesto que la función seno es periódica, la curva se puede extender para cualquier lado del eje X, tantos ciclos como se desee. Un *ciclo* es la menor zona de la gráfica que comprende un período. En la figura 6.2-2 aparece la sinusoide para valores de x comprendidos en el intervalo de -3π a 3π.

La gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$, en donde a es una constante positiva, se puede trazar fácilmente por comparación con la curva del seno; la constante a se denomina **amplitud** de la función. Las ordenadas de $y = a \operatorname{sen} x$ son a veces las ordenadas de $y = \operatorname{sen} x$: cuando sen x alcanza su valor máximo, **1**, para $x = \pi/2$, $y = a \operatorname{sen} x$ alcanza su valor máximo, a; cuando la gráfica de sen x corta al eje X, $y = a \operatorname{sen} x$, toma el valor cero; cuando sen x llega a su punto más bajo, -1, para $x = 3\pi/2$, la gráfica de $y = a \operatorname{sen} x$ alcanza su valor mínimo, $-a$.

En la figura 6.2-3 se muestra la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen} x$. La línea punteada corresponde a la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

La gráfica de $y = \operatorname{sen} bx$, donde b es una constante positiva, requiere para su trazo algunas consideraciones preliminares. Obviamente la curva es de naturaleza sinusoidal siendo bx el argumento de la función; cuando x va de **0** a $2\pi/b$, bx va de **0** a 2π; o sea que $\operatorname{sen} bx$ cubre un período completo cuando x va de **0** a $2\pi/b$. Se dice entonces que la gráfica de

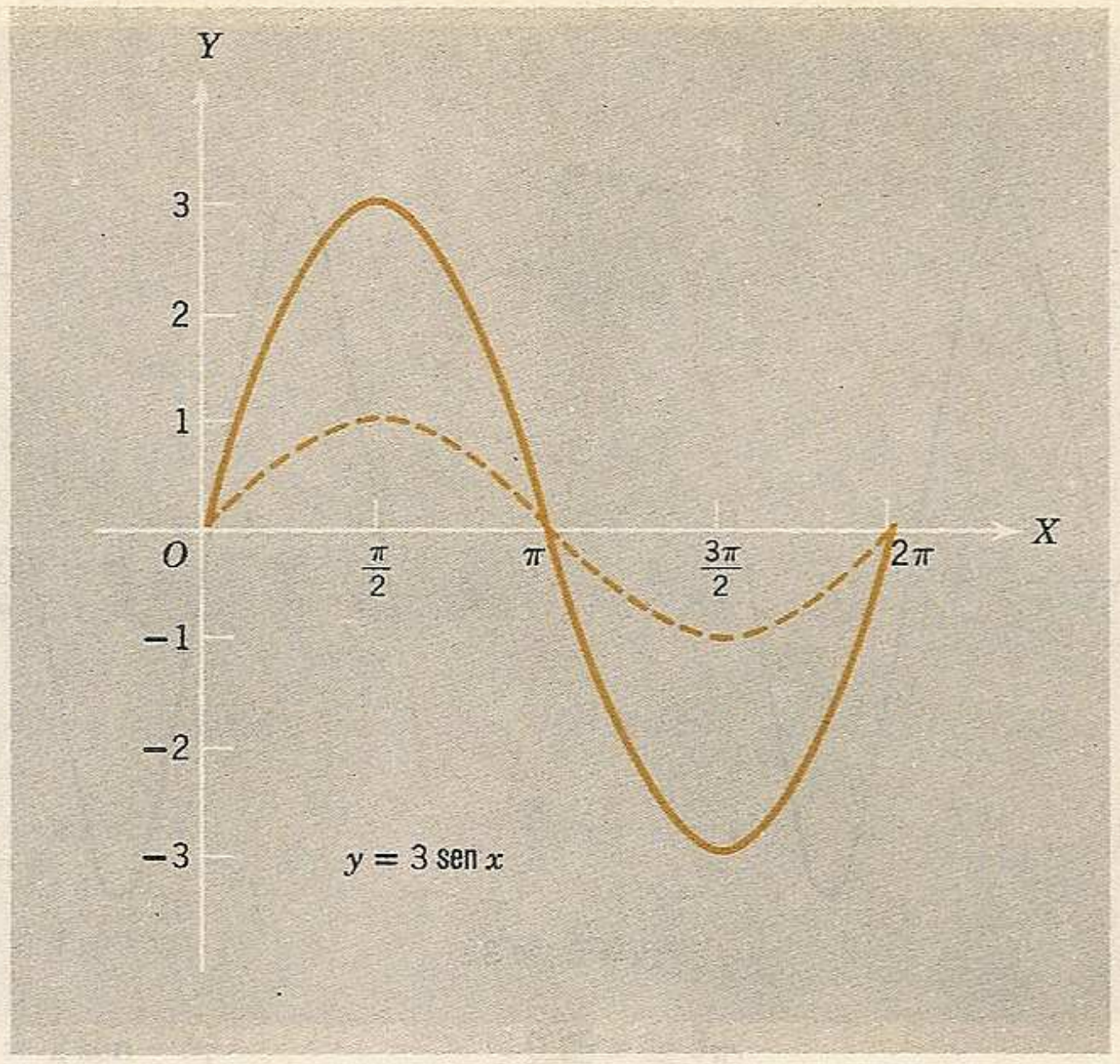


Figura 6.2-3

esta función es una sinusoide con **período $2\pi/b$.** Considerando solamente un ciclo, se ve que la gráfica corta al eje X cuando

$$bx = 0, \pi, \text{ y } 2\pi,$$

o cuando

$$x = 0, \frac{\pi}{b}, \text{ y } \frac{2\pi}{b}.$$

El valor máximo se alcanza cuando

$$bx = \frac{\pi}{2} \text{ ó } x = \frac{\pi}{2b},$$

y el mínimo cuando

$$bx = \frac{3\pi}{2} \text{ ó } x = \frac{3\pi}{2b}.$$

De las consideraciones anteriores se puede trazar la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx$. Se obtiene así una gráfica sinusoide de **amplitud a** y **período $2\pi/b$.** El siguiente ejemplo sirve como ilustración.

Ejemplo. Trace la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} 3x$, en el intervalo $(-2\pi/3) \leqq x \leqq (4\pi/3)$.

Solución: La función es sinusoidal, siendo **2** su amplitud y **$2\pi/3$** su período. Primero trace la porción de la gráfica que corresponde a un período, y después extiéndala al dominio dado (figura 6.2-4).

Para un ciclo, la curva corta el eje X cuando

$$3x = 0, \pi \text{ y } 2\pi,$$

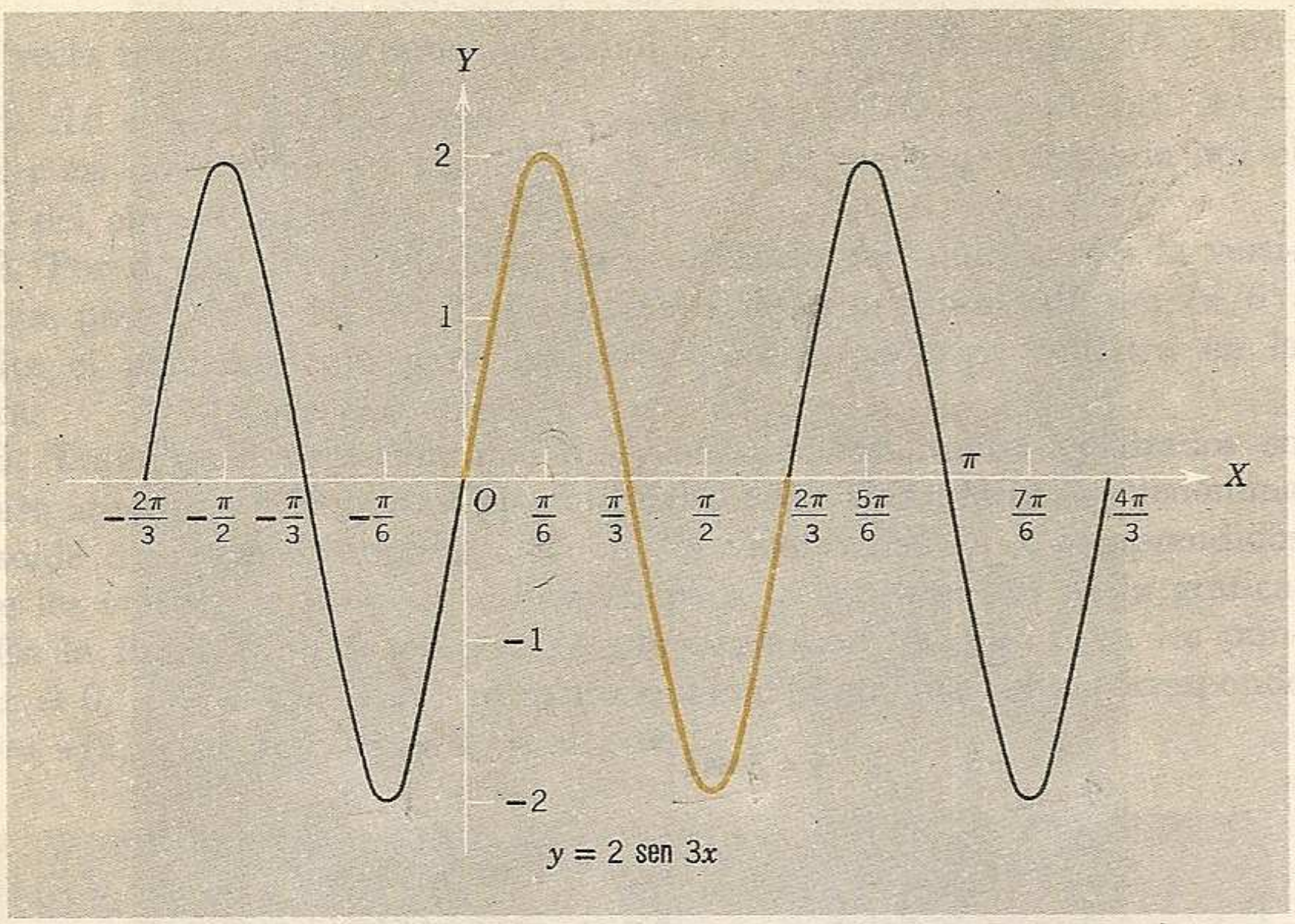


Figura 6.2-4

o sea, para

$$x = 0\,\frac{\pi}{3},\ \text{y}\ \frac{2\pi}{3}.$$

Alcanza el valor máximo de 2 para

$$3x = \frac{\pi}{2},\ \text{ó en}\ x = \frac{\pi}{6},$$

y su valor mínimo de -2 para

$$3x = \frac{3\pi}{2},\ \text{ó en}\ x = \frac{\pi}{2}.$$

Se trazó primero la porción más clara de la curva.

EJERCICIOS 6.2

Trace la gráfica de cada función en el intervalo dado y establezca la amplitud y el período.

1. $y = \text{sen}\ x$, $\qquad -\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi.$

2. $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\ x$, $\qquad -\pi \leqq x \leqq \frac{5}{2}\,\pi.$

3. $y = 3\ \text{sen}\ x$, $\qquad 0 \leqq x \leqq 4\pi.$

4. $y = \text{sen}\ 2x$, $\qquad 0 \leqq x \leqq 2\pi.$

5. $y = 2\ \text{sen}\,\frac{1}{3}\,x$, $\qquad 0 \leqq x \leqq 3\pi.$

6. $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$, $0 \leqq x \leqq 1$.

7. $y = 3 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} x$, $-2 \leqq x \leqq 2$.

8. $y = -\operatorname{sen} x$, $-\frac{3\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$.

9. $y = -2 \operatorname{sen} 2x$, $-\pi \leqq x \leqq 2\pi$.

10. $y = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$, $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

11. $y = 3 \operatorname{sen} \pi x$, $0 \leqq x \leqq 4$.

12. $y = 2 \operatorname{sen} \frac{4}{3} x$, $0 \leqq x \leqq 3\pi$.

13. $y = \frac{2}{3} \operatorname{sen} \frac{1}{4} x$, $0 \leqq x \leqq 8\pi$.

14. $y = 2 \operatorname{sen} 4x$, $-\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$.

15. $y = 4 \operatorname{sen} \frac{2x}{3}$, $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

16. $y = 2 \operatorname{sen} \frac{3}{2} x$, $0 \leqq x \leqq 3\pi$.

17. $y = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} x$, un período.

18. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 8x$, un período.

19. La ecuación para cierto voltaje alterno e, está dada por $e = 110 \operatorname{sen} 157t$. Trace la curva de voltaje para varios ciclos.

20. Si en la ecuación $y = \operatorname{sen} bx$, b es pequeño, la curva resultante se aproxima al oleaje del océano. Construya la gráfica de $y = \operatorname{sen} \frac{\pi}{20} x$, para varios ciclos.

6.3. GRAFICA DE $Y = A \operatorname{SEN}(BX + \alpha)$

La gráfica de $y = a \operatorname{sen} (bx + \alpha)$, $\alpha \neq 0$, es similar a la gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx$; α recibe el nombre de **ángulo de fase**, y desplaza (defasa) la gráfica a la izquierda o a la derecha según que sea positiva o negativa. La magnitud del defasamiento está dada por α/b.

Ejemplo. Trace un ciclo de la gráfica $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Solución: La amplitud es $\frac{1}{2}$ y el período $2\pi/2 = \pi$. La gráfica 6.3-1, corta al eje X cuando el argumento $\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ toma los valores siguientes:

$$2x + \frac{\pi}{4} = 0, \pi, \text{ y } 2\pi,$$

o sea cuando

$$x = -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \text{ y } \frac{7\pi}{8}.$$

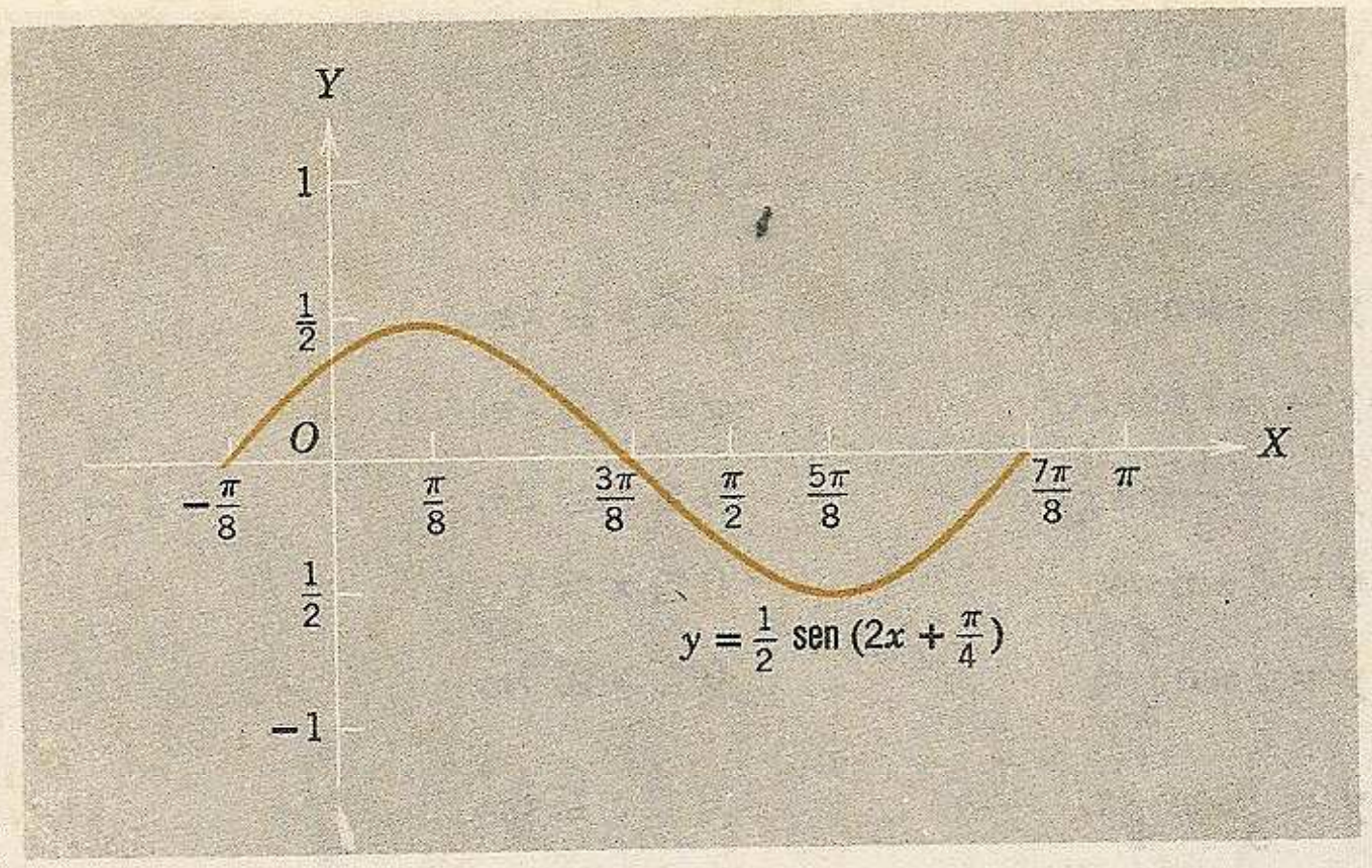


Figura 6.3-1

Alcanza su valor máximo para

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

o sea para

$$x = \frac{\pi}{8},$$

y su valor mínimo para

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2},$$

o sea para

$$x = \frac{5\pi}{8}.$$

Si $x = 0$,

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 0.35.$$

En la figura 6.3-1 se observa que la curva está defasada $\pi/8$ unidades a la izquierda de la posición de la sinusoide. Sobre los mismos ejes el estudiante debe trazar la curva $y = \operatorname{sen} x$ y comparar una con otra.

6.4. GRAFICA DE $Y = \cos X$

En el artículo 3.2 se vio que para un ángulo agudo, x, $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. En el capítulo 7 se demostrará a su vez que dicha igualdad es válida para todo ángulo, por lo que la construcción de la gráfica de $y = \cos x$ se puede referir a la gráfica de $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{2}{\pi}\right)$. De acuerdo con lo visto en el artículo 6.3, la curva está defasada $\pi/2$ unidades a la *izquierda* de la curva del seno; su amplitud es **1**, y su período $2\pi/1 = 2\pi$.

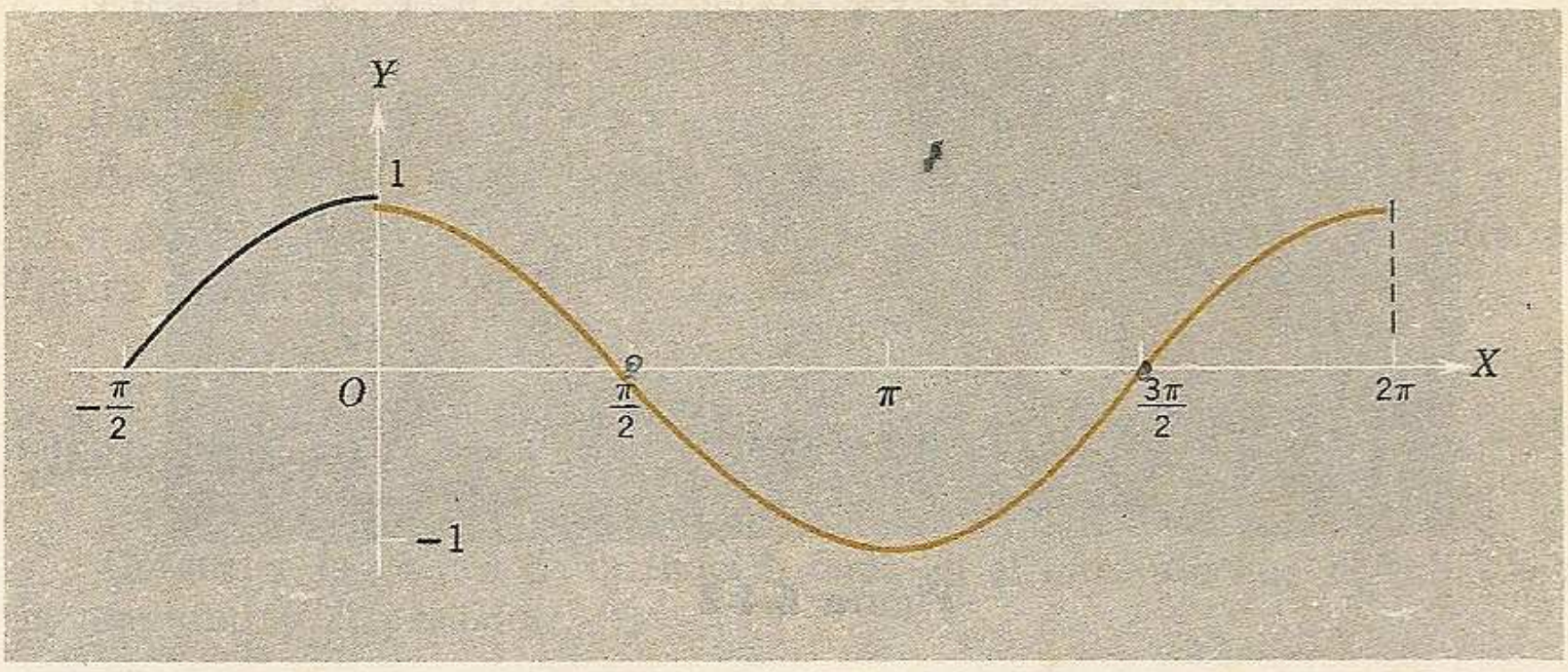


Figura 6.4-1

La curva corta al eje X (figura 6.4-1), cuando

$$x + \frac{\pi}{2} = 0, \pi, \text{ y } 2\pi.$$

o sea para

$$x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \text{ y } \frac{3\pi}{2}.$$

Alcanza su valor máximo para

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

o sea para

$$x = 0.$$

y su valor mínimo cuando

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2},$$

o sea para

$$x = \pi.$$

Si $x = 0$,

$$y = \cos 0 = 1.$$

Por su periodicidad, la gráfica se puede extender a lo largo del eje X.

La porción más clara de la curva en la figura 6.4-1, se designa usualmente con el nombre de *ciclo* de la curva del coseno o cosenoide.

La gráfica de $\boldsymbol{y = a \cos bx}$ tiene amplitud $\boldsymbol{a}$ y período $\boldsymbol{2\pi/b}$; se puede construir fácilmente observando (figura 6.4-1) que la curva corta al eje X cuando el ángulo $bx = \pi/2$ y $3\pi/2$. Su punto máximo se alcanza para $bx = 0$ y 2π; y su mínimo para $bx = \pi$.

Ejemplo 1. Trace un ciclo de la curva $y = \cos \frac{1}{2}x$.

Solución: La amplitud es **1** y el período $\mathbf{4}\pi$; la curva corta al eje X (figura 6.4-2) cuando

$$\frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} \text{ y } \frac{3\pi}{2},$$

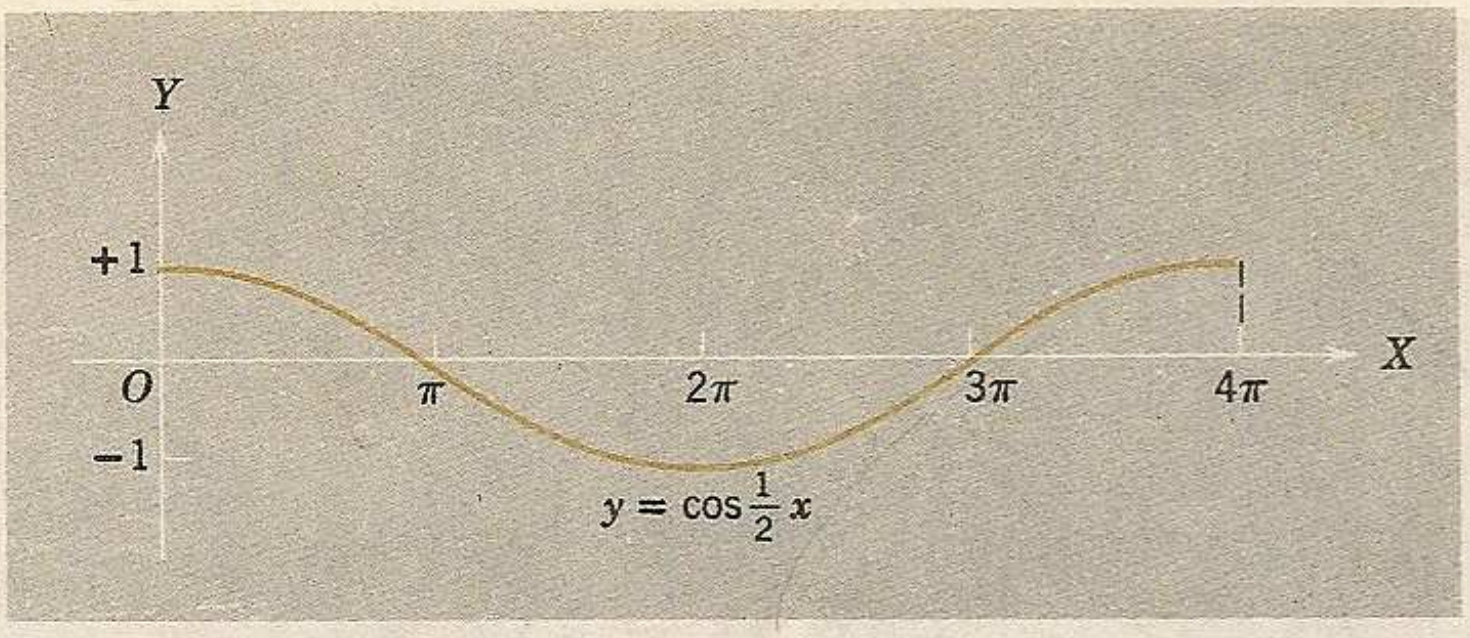


Figura 6.4-2

o sea para

$$x = \pi \text{ y } 3\pi.$$

Su máximo se presentará cuando

$$\tfrac{1}{2}x = 0, \text{ y } 2\pi,$$

o sea para

$$x = 0, \text{ y } 4\pi.$$

Y su punto más bajo cuando

$$\tfrac{1}{2}x = \pi,$$

o sea, para

$$x = 2\pi.$$

La gráfica de $y = a \operatorname{sen} bx + c \cos dx$ se puede trazar por composición de ordenadas. Si $y_1 = a \operatorname{sen} bx$ y $y_2 = c \cos dx$, resulta $y = y_1 + y_2$. Se traza primero la curva $y_1 = a \operatorname{sen} bx$ y luego, sobre los mismos ejes, se traza la curva $y_2 = c \cos dx$; sumando las ordenadas y_1 y y_2 se obtiene la curva de $y = a \operatorname{sen} bx + c \operatorname{sen} dx$.

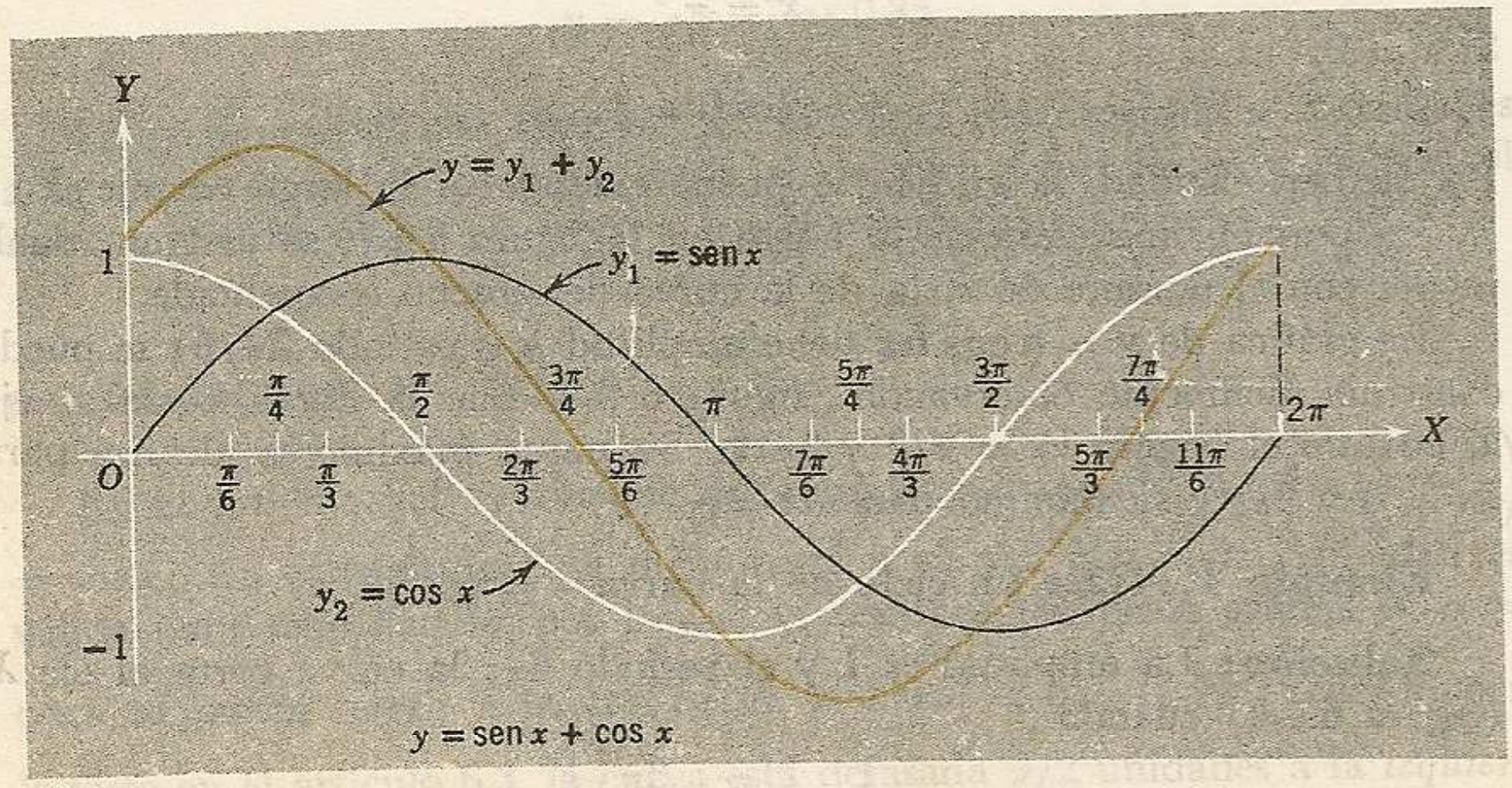


Figura 6.4-3

Ejemplo 2. Trace la gráfica de $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

Solución: Sea $y_1 = \operatorname{sen} x$ y $y_2 = \cos x$; entonces $y = y_1 + y_2$.

En un mismo sistema de ejes trace la gráfica de $y_1 = \operatorname{sen} x$ y la de $y_2 = \cos x$. Sumando las ordenadas se obtiene y, como se muestra en la figura 6.4-3.

EJERCICIOS 6.4

Construya la gráfica de la función dada en el intervalo que se indica y anote la amplitud y el período.

1. $y = \cos x, \qquad -2\pi \leqq x \leqq 4\pi.$

2. $y = 3 \cos x, \qquad -\pi \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$

3. $y = \frac{1}{3} \cos x, \qquad 0 \leqq x \leqq 3\pi.$

4. $y = \cos \frac{1}{2} x, \qquad -\pi \leqq x \leqq 4\pi.$

5. $y = 3 \cos 2x, \qquad -\pi \leqq x \leqq 4\pi.$

6. $y = 3 \cos \pi x, \qquad 0 \leqq x \leqq 2.$

7. $y = \cos \frac{\pi}{2} x, \qquad -2 \leqq x \leqq 3.$

8. $y = 4 \cos \frac{1}{4} x, \qquad 0 \leqq x \leqq 4.$

En los problemas 9 a 16, construya la gráfica para un ciclo, e indique la amplitud, el período y el defasamiento.

9. $y = 3 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

10. $y = 2 \operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right).$

11. $y = 3 \operatorname{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right).$

12. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

13. $y = 2 \cos(x + \pi).$

14. $y = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right).$

15. $y = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right).$

16. $y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{3}x - \frac{\pi}{5}\right).$

En el caso de $y + d = a \operatorname{sen}(bx + \alpha)$, la gráfica es simplemente la correspondiente a $y = a \operatorname{sen}(bx + \alpha)$, pero oscilando respecto a la recta $y = -d$ en vez del eje X. En los problemas 17 a 20 trace dos ciclos de la gráfica.

17. $y - 2 = \operatorname{sen} x.$

18. $y = 1 + 2 \cos x.$

19. $y + 3 = 3 \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right).$

20. $y = 3 - 2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x - \pi\right).$

Por composición de ordenadas, trace dos ciclos de las gráficas de los problemas 21 a 26.

21. $y = \operatorname{sen} x + 2 \cos x.$

22. $y = 2 \operatorname{sen} x + \cos 2x.$

23. $y = \operatorname{sen} x - \cos 2x.$

24. $y = \operatorname{sen} 2x + 2 \operatorname{sen} x.$

25. $y = 2 \cos \frac{1}{2} x - \operatorname{sen} x.$

26. $y = \cos x - \cos \frac{1}{2} x.$

6.5. VARIACION DE TAN θ

Considere el círculo unitario de la figura 6.5-1. Si sobre el lado terminal de θ se escoge $P'(x', y')$ tal que $P'A$ sea siempre tangente al círculo en el punto A,

$$\tan\theta = \frac{y'}{x'} = \frac{y'}{1} = y'.$$

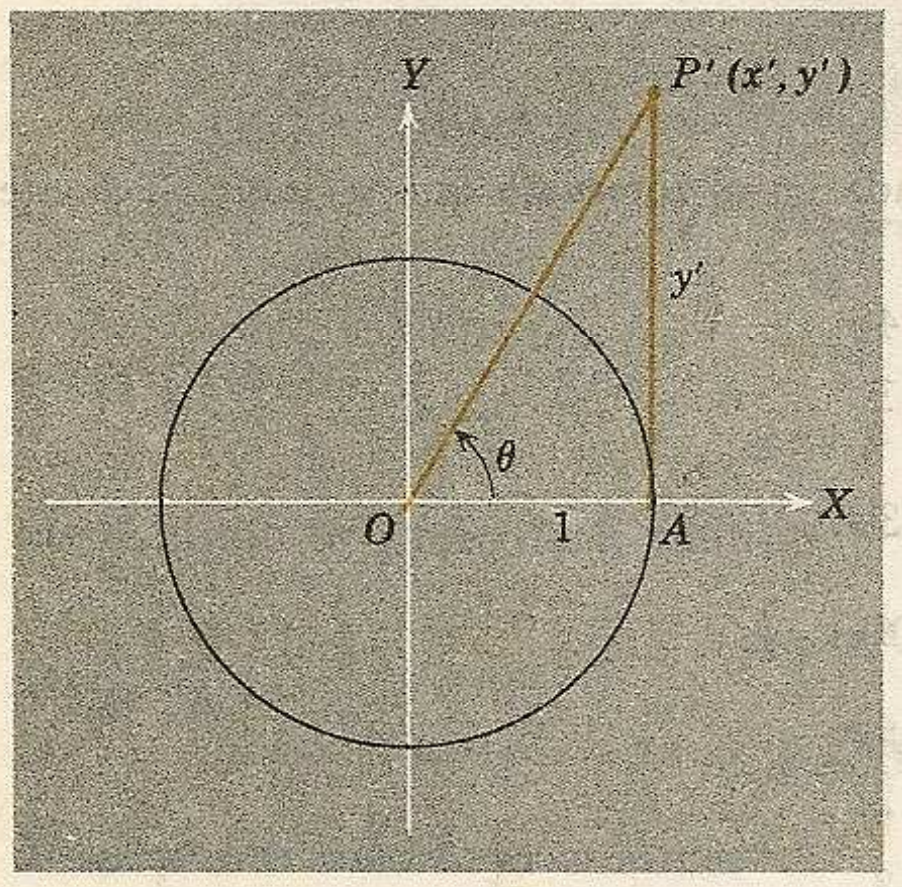


Figura 6.5-1

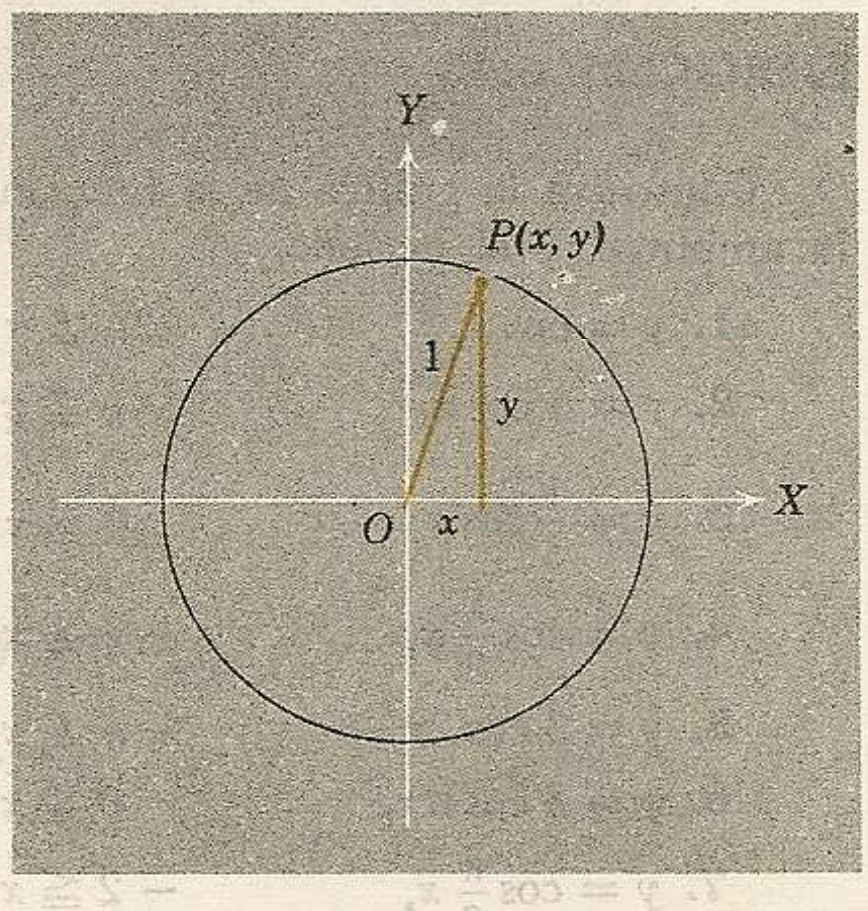


Figura 6.5-2

Cuando θ crece de 0° a 90°, tan θ, o y', aumenta a partir de cero; a medida que θ se aproxima a 90°, el segmento $P'A$ crece más y más. Si en la figura 6.5-2, P pertenece a la circunferencia, y se aproxima a **1** a medida que x se aproxima a **cero;** en consecuencia $\tan\theta = y/x$, para $\theta = 90°$, sería $1/0$, valor que evidentemente no existe. Lo que pasa es que como tan θ es una función de reales a reales (los elementos del dominio y del recorrido son reales), y no existe imagen de $\theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $\frac{\pi}{2} + 2\,n\pi$ (n = 0.1, . . .) no es elemento del dominio, es decir, no forma parte de él.

Toda fracción $\mathbf{1}/\boldsymbol{h}$ toma valores numéricos cada vez más grandes a medida que $\boldsymbol{h}$ se aproxima a **0,** y será numéricamente mayor que cualquier número positivo dado de antemano, si $\boldsymbol{h}$ es suficientemente pequeño. Como la fracción $1/0$ no existe, se dice que el límite de $1/h$, cuando h se **aproxima** a cero por el lado positivo, no existe, o bien que $1/h$ tiende al infinito cuando h tiende a cero.

La proposición anterior se denota simbólicamente por medio de la expresión

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} = \infty,$$

en donde el símbolo ∞ se denomina *infinito*. El lector no debe olvidar, al emplear el símbolo ∞, que representa una cantidad que está creciendo

continuamente, **pero que no pertenece al conjunto de los números reales,** ya que de ser así, $\frac{1}{0}$ estaría definido. Note que si x es real, $x < \infty$.

Si h se aproxima a cero a través de valores negativos, entonces

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1}{h} = -\infty.$$

En consecuencia, para la tangente, y se aproxima a **1** y x se aproxima a **0** a medida que θ tiende a **90°**, y

$$\lim_{\theta \to 90^\circ} \tan \theta = \pm \infty,$$

en donde el signo depende de que θ se aproxime a 90° por el CI o el CII.

Las consideraciones anteriores se pueden resumir diciendo que cuando θ va de 0° a 90°, **sin tomar este último valor,** *tan θ toma todos los valores reales positivos.*

En el segundo cuadrante tan θ es negativa. A medida que θ se aproxima a 90° a partir de valores mayores de 90°, tan θ se aproxima a menos infinito. Por tanto, cuando θ va de 90° a 180°, sin tomar el primer valor, tan θ toma todos los valores reales negativos, desde $-\infty$ hasta 0.

El estudiante debe reflexionar sobre el dominio de tan θ, en el tercero y cuarto cuadrantes.

TABLA 6.5

Recorrido de tan θ

Dominio de tan θ	Recorrido
$0° \leqq \theta < 90°$	$0 \leqq \tan \theta < \infty$
$90° < \theta \leqq 180°$	$-\infty < \tan \theta \leqq 0$
$180° \leqq \theta < 270°$	$0 \leqq \tan \theta < \infty$
$270° < \theta \leqq 360°$	$-\infty < \tan \theta \leqq 0$

De la tabla 6.5 se puede observar que tan θ es una función periódica con período de 180° ó π radianes y que θ **no toma** los valores **90°** y **270°.**

Es conveniente que el estudiante estudie los dominios y recorridos de *cot θ*, *sec θ* y *csc θ* considerándolas como los recíprocos de *tan θ*, *cos θ* y *sen θ*, respectivamente. De manera análoga debe analizar *tan u*, *cot u*, *sec u* y *csc u*, en donde u es un número real.

6.6. GRAFICAS DE TAN X, COT X, SEC X y CSC X

Usualmente se trazan las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, y $y = \csc x$, localizando algunos de sus puntos en un sistema de coordenadas. En la tabla 6.6 se muestran algunos de sus valores y en la figura 6.6-1 las correspondientes a curvas.

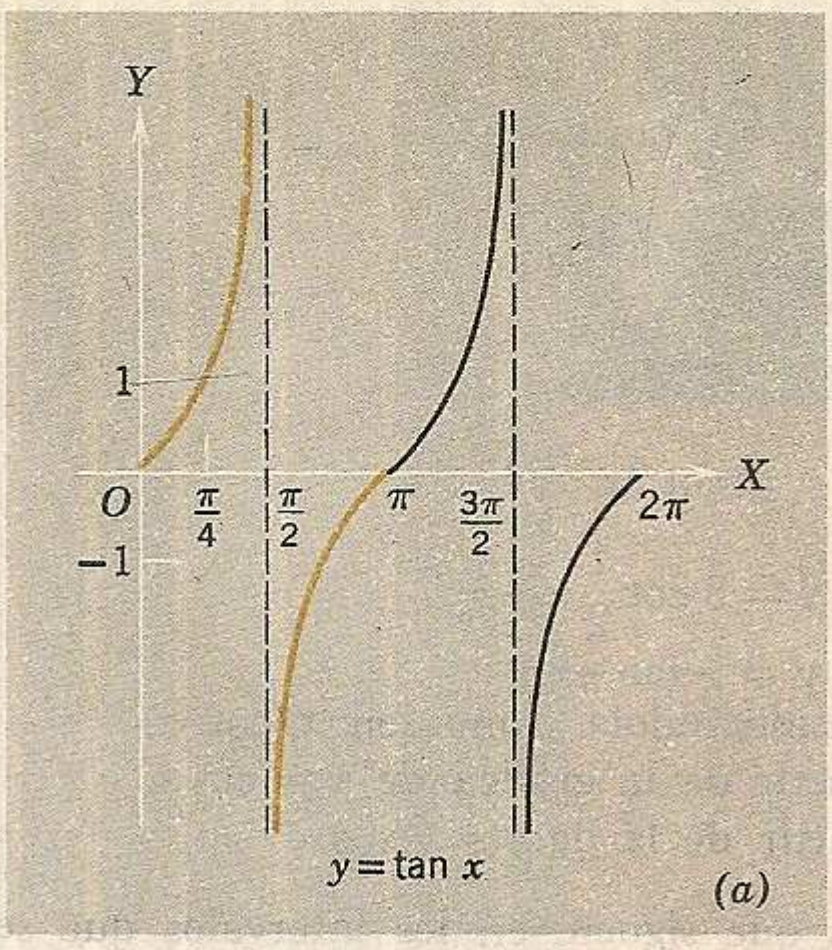
TABLA 6.6

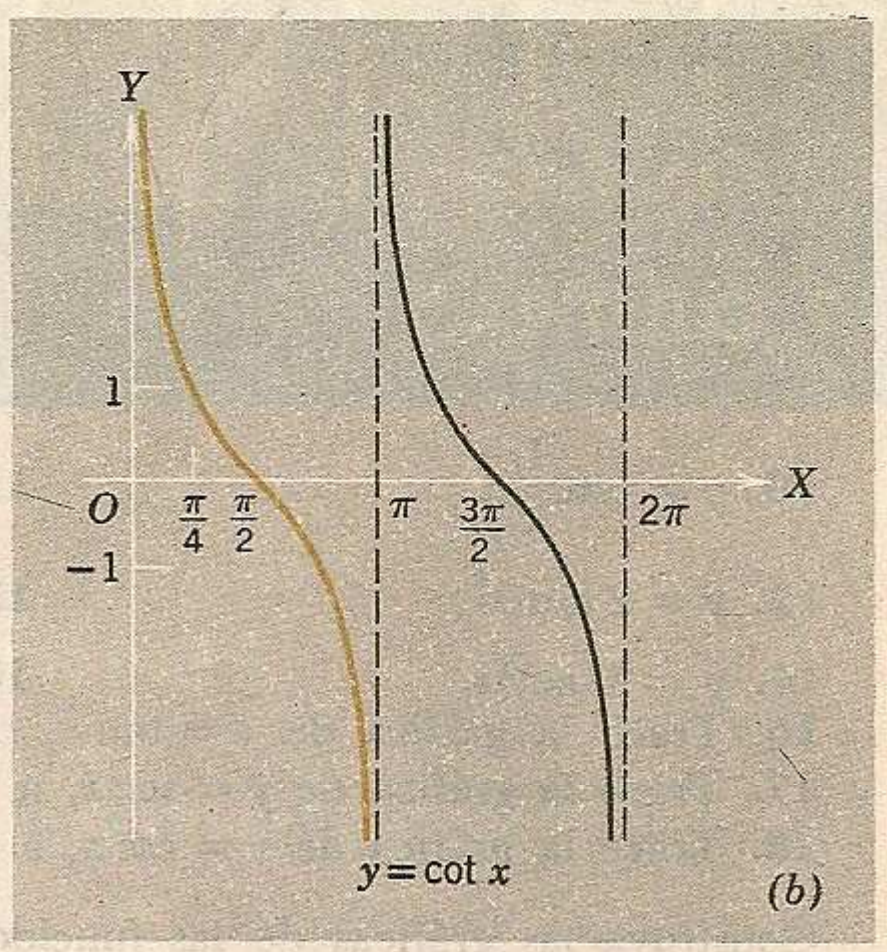
x	$y = \tan x$	$y = \cot x$	$y = \sec x$	$y = \csc x$
0	0	no existe	1	no existe
$\frac{\pi}{6}$	0.6	1.7	1.2	2
$\frac{\pi}{3}$	1.7	0.6	2	1.2
$\frac{\pi}{2}$	no existe	0	no existe	1
$\frac{2\pi}{3}$	-1.7	-0.6	-2	1.2
$\frac{5\pi}{6}$	-0.6	-1.7	-1.2	2
π	0	no existe	-1	no existe
$\frac{7\pi}{6}$	0.6	1.7	-1.2	-2
$\frac{4\pi}{3}$	1.7	0.6	-2	-1.2
$\frac{3\pi}{2}$	no existe	0	no existe	-1
$\frac{5\pi}{3}$	-1.7	-0.6	2	-1.2
$\frac{11\pi}{6}$	-0.6	-1.7	1.2	-2
2π	0	no existe	1	no existe

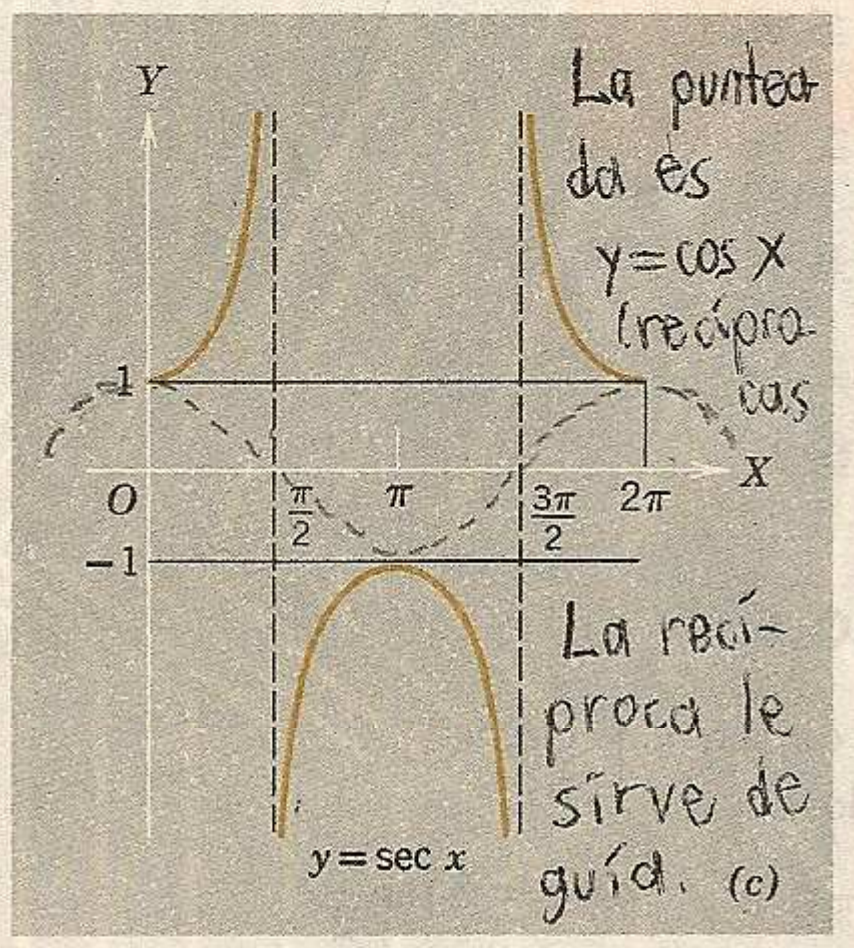
Como se dijo, en la sección 6.5, el período de *tan x* es π. Puesto que cot x es el recíproco de *tan x*, su período obviamente también es π. Análogamente, *sec x* y *csc x* tendrán el mismo período que sus recíprocos, esto es, 2π. En la figura 6.6-1 se muestran dos ciclos de las gráficas de *tan x* y cot x, y un ciclo de las gráficas de *sec x* y *csc x*.

Las rectas punteadas se denominan *asíntotas*. Se trata de rectas a las cuales la curva se aproxima, sin llegar a tocarlas nunca, ya que el contacto ocurriría en puntos donde la función no existe.

Con referencia a la figura 6.6-1, se pueden trazar las gráficas de ***a* tan *bx*, *a* cot *bx*, *a* sec *bx*** y ***a* csc *bx***, observando que el argumento es ***bx***. Para **tan *bx*** y **cot *bx*** el período es π/b; en tanto que para **sec *bx*** y **csc *bx*** el período es $2\pi/b$. La constante positiva a aumenta o disminuye el valor de las ordenadas según que sea mayor o menor que **1**.







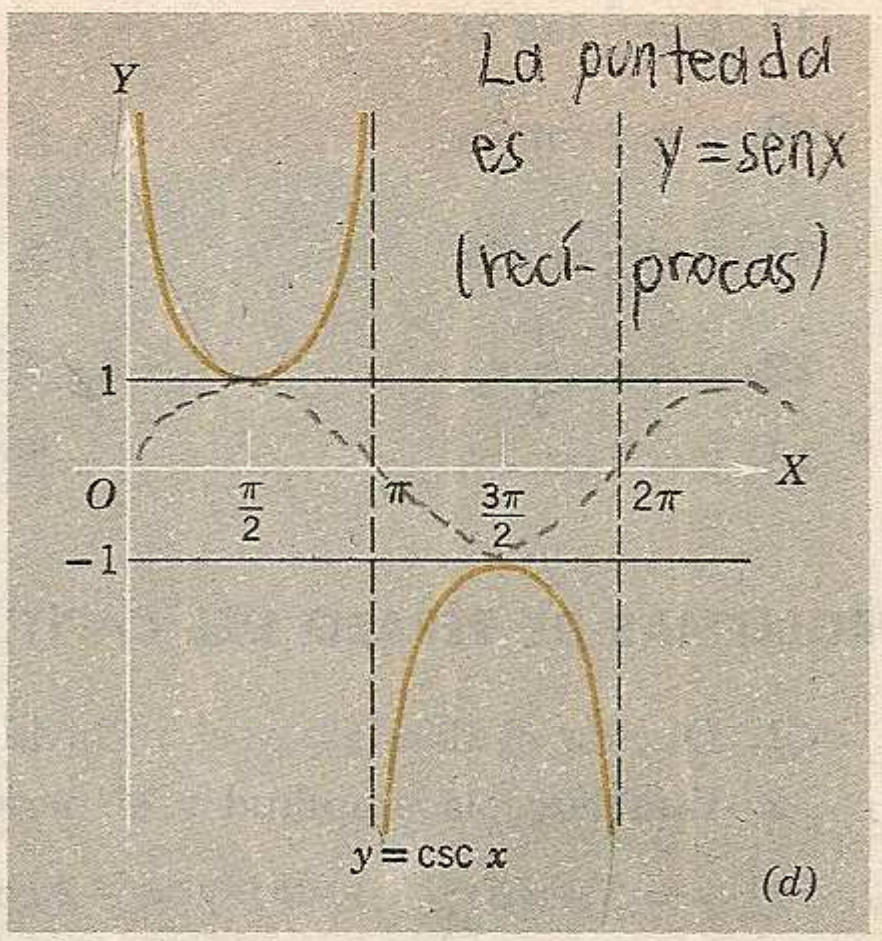


Figura 6.6-1

Obviamente, las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$, se pueden trazar también mediante este procedimiento de localizar puntos.

EJERCICIOS 6.6

1. Elabore una tabla análoga a la 6.5 para cada una de las funciones cot θ, sec θ y csc θ.

2. $f(x)$ es creciente si $f(x_2) > f(x_1)$ para $x_2 > x_1$ y decreciente si $f(x_2) < f(x_1)$ para $x_2 < x_1$. Diga si tan u y cot u son crecientes o decrecientes.

3. Use papel milimétrico para construir los puntos de la tabla 6.6 y trace las gráficas de *a)* $y = \tan x$; *b)* $y = \cot x$; *c)* $y = \sec x$; *d)* $y = \csc x$.

En los problemas del 4 al 15, trace dos ciclos de las gráficas correspondientes, uno del lado positivo del eje X y uno del negativo.

Establezca el período.

4. $y = 3 \tan x$.

5. $y = \frac{1}{2} \tan x$.

6. $y = \frac{1}{3} \cot x$.

7. $y = 2 \cot x$.

8. $y = 2 \sec x$.

9. $y = \frac{1}{4} \csc x$.

10. $y = \tan \frac{1}{2} x$.

11. $y = \cot 2x$.

12. $y = 2 \tan 3x$.

13. $y = 3 \cot \frac{1}{2} x$.

14. $y = 2 \sec 3x$.

15. $y = \pi \tan \pi x$.

16. Trace la gráfica de $y = \tan x$, considerándola como sen x/cos x.

17. Trace la gráfica de $y = \sec x$, a partir de la gráfica de $y = \cos x$.

18. Trace la gráfica de $y = \csc x$, a partir de la de $y = \text{sen } x$.

Construya las gráficas de las funciones que siguen, en los intervalos que se indican.

19. $y = \frac{1}{3} \tan 2x$, $\quad -\pi \leqq x \leqq \pi$.

20. $y = 2 \cot \frac{1}{4} x$, $\quad -2\pi \leqq x \leqq 3\pi$.

21. $y = \frac{1}{2} \sec 4x$, $\quad 0 \leqq x \leqq \pi$.

22. $y = \sec \frac{1}{3} x$, $\quad -3\pi \leqq x \leqq 5\pi$.

23. $y = 2 \csc 2x$, $\quad -\pi \leqq x \leqq 2\pi$.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1. Discuta el dominio y el recorrido de sen u y cos u.

2. Establezca la amplitud y el período de

a) $y = 5 \text{ sen } 3x$; $\quad$ *b)* $y = -2 \cos \pi x$; $\quad$ *c)* $y = 3 \tan \frac{x}{2}$.

3. Halle el valor de u para el cual las siguientes funciones adquieren *a)* su valor máximo y *b)* su valor mínimo.

a) sen $(u - \pi)$; $\quad$ *b)* $\cos \left(u + \frac{3\pi}{2}\right)$.

c) 3 sen $(3u + 7)$; $\quad$ *d)* $-2 \cos (\frac{1}{3}u - \pi)$.

4. Trace la gráfica de $y = 3 \text{ sen } 2x$.

5. Mismo problema para $y = -2 \cos x$.

6. Halle los valores de x en donde la gráfica de $y = 5 \text{ sen } (3x - 6)$ corta al eje X, cuando el argumento es un número no negativo menor que 2π.

7. Repita el problema 1 para $\tan \theta$.

8. Diga para qué valores de $x (0 < x < 2\pi)$, $y = \sec x$ es

a) creciente; $\quad$ *b)* decreciente.

9. Trace la gráfica de $y = 2 \tan 3x$ para $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

10. Trace la gráfica de $y = x + 2 \text{ sen } x$ en $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

11. Trace la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x - \cos x$ en $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

CAPITULO 7

Funciones trigonométricas (ángulos compuestos)

7.1. INTRODUCCION

En la sección 1.7, al estudiar el concepto de función, vimos que el símbolo sen $(u + v)$ se refiere a "la función seno de $(u + v)$", y de **ninguna** manera al producto del seno por $(u + v)$; esto es, no se debe caer en el error de considerar las abreviaturas de las funciones trigonométricas como si fueran factores que anteceden a un paréntesis. Análogamente, si el argumento se factoriza, no se debe colocar uno de los factores, aun cuando se trate de una constante, antecediendo a la abreviatura de la función trigonométrica; por ejemplo, $\cos(30° + 60°) = \cos 90° = 0$, es enteramente distinto de $\cos 30° + \cos 60° = \sqrt{3}/2 + 1/2 = (\sqrt{3} + 1)/2$. De la misma manera, $\operatorname{sen}(2 \cdot 30° = \operatorname{sen} 60° = \sqrt{3}/2$ posee un significado distinto al de $\operatorname{sen} 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

En el presente capítulo se deducirán varias fórmulas relativas a funciones trigonométricas de argumentos compuestos. Dichas fórmulas van a ser válidas, tanto para las funciones trigonométricas de los números reales, como para los de los ángulos.

7.2. COSENO DE LA DIFERENCIA Y DE LA SUMA DE DOS ANGULOS

Considere el círculo unitario de la figura 7.2-1, en donde los ángulos A y B son dos ángulos *cualesquiera* en posición normal, que pueden ser, incluso, múltiplos enteros de 2π. La demostración que sigue depende únicamente de la posición del lado terminal. El punto P_1, en el lado terminal del ángulo A, tiene por coordenadas $(cos\ A,\ sen\ A)$, y P_2, en el lado terminal de B, tiene por coordenadas $(cos\ B,\ sen\ B)$.

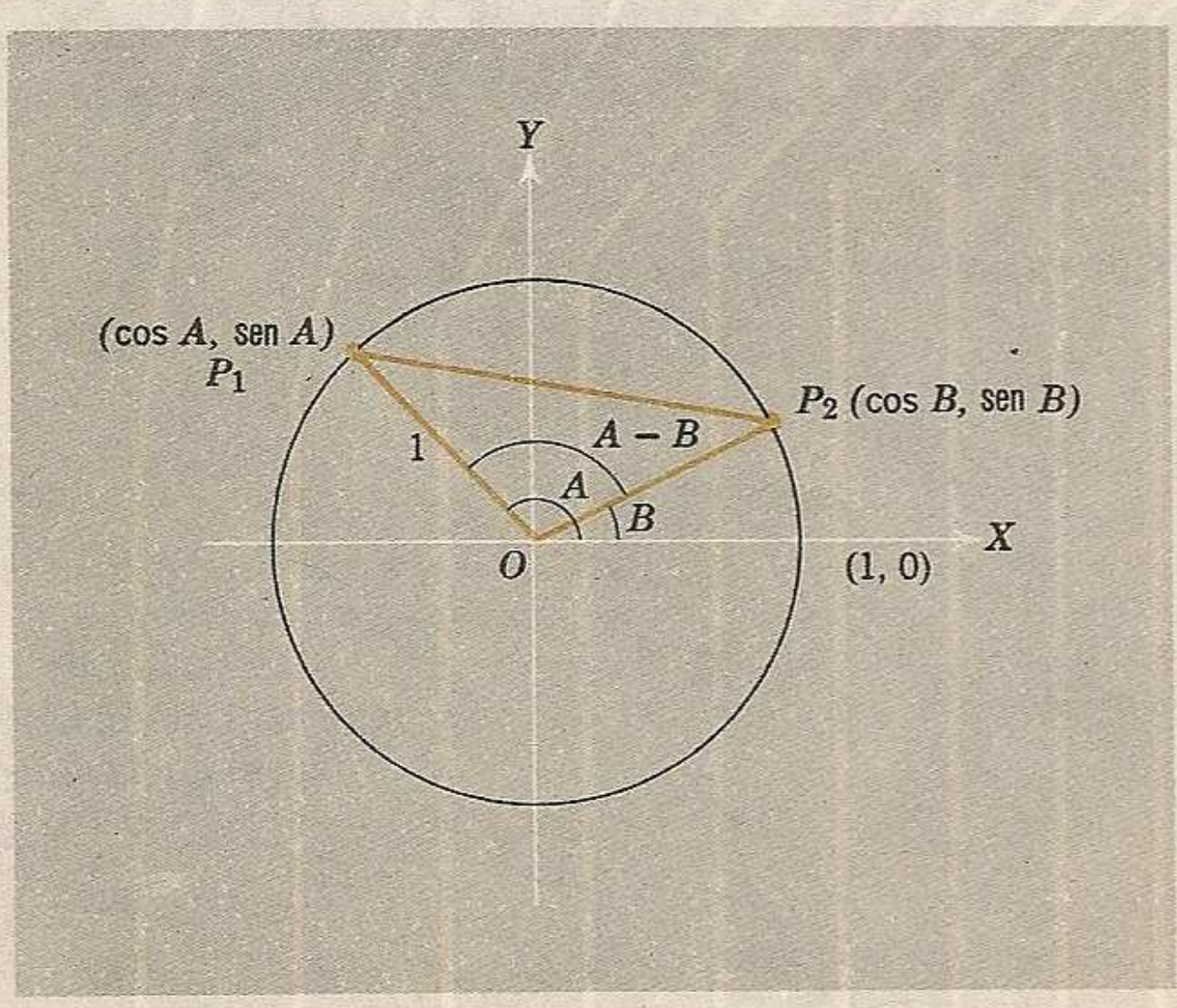


Figura 7.2-1

De la fórmula para la distancia entre dos puntos

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

y de la figura 7.2-1, se tiene

$$\overline{P_1P_2}^2 = (\cos B - \cos A)^2 + (\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} A)^2.$$

Desarrollando los binomios y simplificando, resulta

(7.2-1) $$\overline{P_1P_2}^2 = 2 - 2\cos B \cos A - 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A.$$

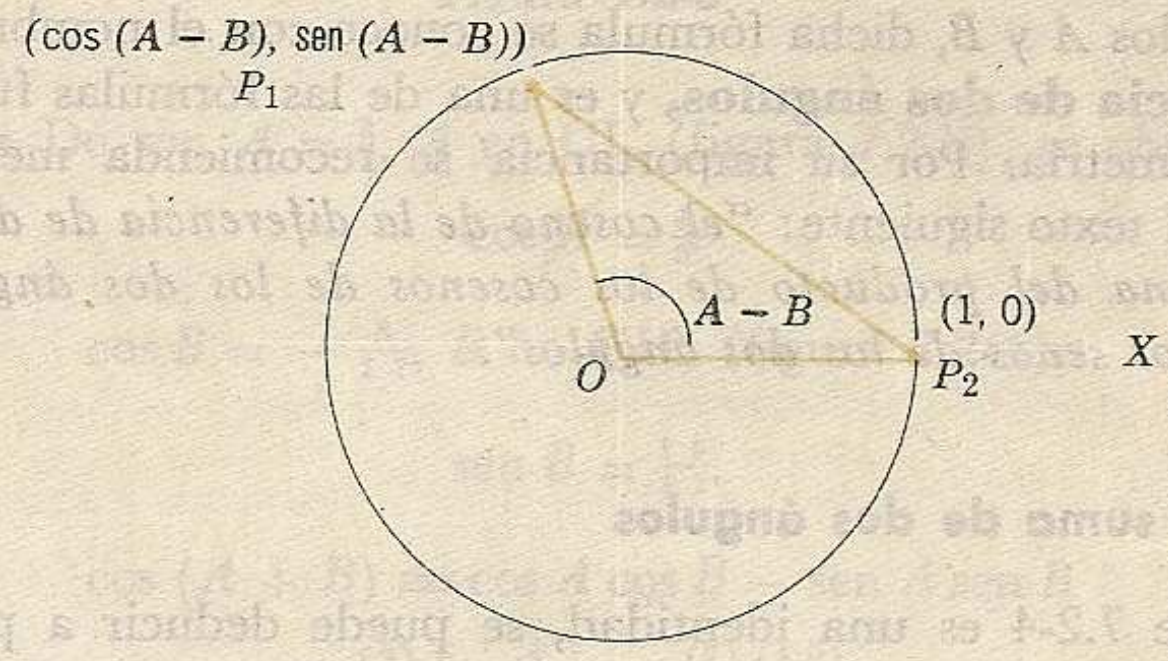


Figura 7.2-2

Suponga ahora que el círculo gira en sentido dextrógiro hasta que P_1 y P_2 coinciden con el punto $(1, 0)$ (figura 7.2-2). El ángulo $(A - B)$ está ahora en posición normal, y las nuevas coordenadas de P_1 son *cos* $(A - B)$, *sen* $(A - B)$. En esta nueva posición, el cuadrado de la distancia $|P_1P_2|$ es

$$\overline{P_1P_2}^2 = [1 - \cos(A - B)]^2 + [0 - \operatorname{sen}(A - B)]^2,$$

y desarrollando los binomios y simplificando:

(7.2-2) $$\overline{P_1P_2}^2 = 2 - 2\cos(A - B).$$

Como la distancia entre P_1 y P_2 permanece constante al efectuarse la rotación, se pueden igualar entre sí 7.2-1 y 7.2-2; se obtiene;

(7.2-3) $$2 - 2\cos(A - B) = 2 - 2\cos B \cos A - 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} A,$$

que simplificada se escribe

(7.2-4) $$\mathbf{\cos(A - B) \equiv \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}$$

Se puede demostrar que 7.2-4 es válida para *todos* los ángulos A y B, considerando que el ángulo P_2OP_1, en las figuras 7.2-1 y 7.2-2, es siempre igual a cualquiera de los ángulos siguientes:

(7.2-5) $\quad (A - B),\ (B - A),\ [(A - B) \pm n \cdot 360°],\ [(B - A) \pm n \cdot 360°]$

en donde n es un entero. En todos estos casos

$$\cos \measuredangle P_2OP_1 = \cos (A - B).$$

Así:

$$\cos (B - A) = \cos [-(A - B)] = \cos (A - B),$$
$$\cos [(A - B) \pm n \cdot 360°] = \cos (A - B),$$

y

$$\cos [(B - A) \pm n \cdot 360°] = \cos (B - A) = \cos (A - B).$$

En consecuencia, 7.2-4 es una *identidad,* puesto que es válida para todos los ángulos A y B, dicha fórmula se conoce con el nombre de **coseno de la diferencia de dos ángulos,** y es una de las fórmulas fundamentales de la trigonometría. Por su importancia se recomienda memorizarla de acuerdo con el texto siguiente: *"el coseno de la diferencia de dos ángulos es igual a la suma del producto de los cosenos de los dos ángulos, más el producto de los senos de los dos ángulos".*

Coseno de la suma de dos ángulos

Puesto que 7.2-4 es una identidad, se puede deducir a partir de ella la correspondiente para el coseno de la suma de dos ángulos; al efecto sustituya el ángulo B por $-B$:

$$\cos [A - (-B)] \equiv \cos A \cos (-B) + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} (-B)$$

y haciendo uso de las funciones de ángulos negativos, resulta

(7.2-6) $\qquad \mathbf{\cos (A + B) \equiv \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.}$

El estudiante debe elaborar un texto adecuado para describir la fórmula 7.2-6. Ambas identidades, la 7-2-4 y la 7.2-6, reciben el nombre de fórmulas de adición para la función coseno.

Ejemplo 1. Halle el valor exacto de cos 75°.

Solución: $\cos 75° = \cos (30° + 45°)$.

$$\cos (30° + 45°) = \cos 30° \cos 45° - \operatorname{sen} 30° \operatorname{sen} 45°,$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\mathbf{\cos 75° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4}.}$$

Ejemplo 2. Halle el valor de cos $(A + B)$, si sen $A = \frac{}{5}$, A en CI, y $\cos B = -\frac{8}{17}$, B en CII.

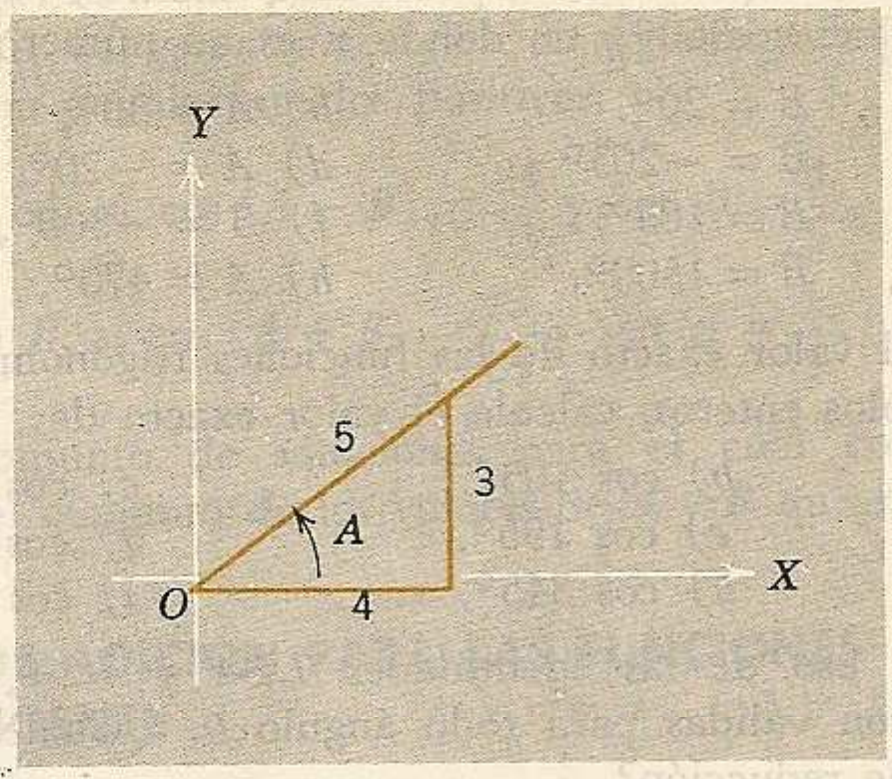


Figura 7.2-3

Solución: De sen $A = \frac{3}{5}$, A en CI, (figura 7.2-3), se obtiene

$$\cos A = \tfrac{4}{5}.$$

De

$$\cos B = -\tfrac{8}{17}, \quad B \text{ en CII, (figura 7.2-4),}$$

se obtiene

$$\operatorname{sen} B = \tfrac{15}{17}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\cos (A + B) &\equiv \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\ &= \left(\tfrac{4}{5}\right)\left(-\tfrac{8}{17}\right) - \left(\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{15}{17}\right),\end{aligned}$$

ó

$$\boldsymbol{\cos (A + B) = -\tfrac{77}{85}}.$$

EJERCICIOS 7.2

1. P_1 es un punto en el lado terminal del ángulo A y P_2 un punto en el lado terminal del ángulo B, ambos en posición normal. Demuestre que el ángulo

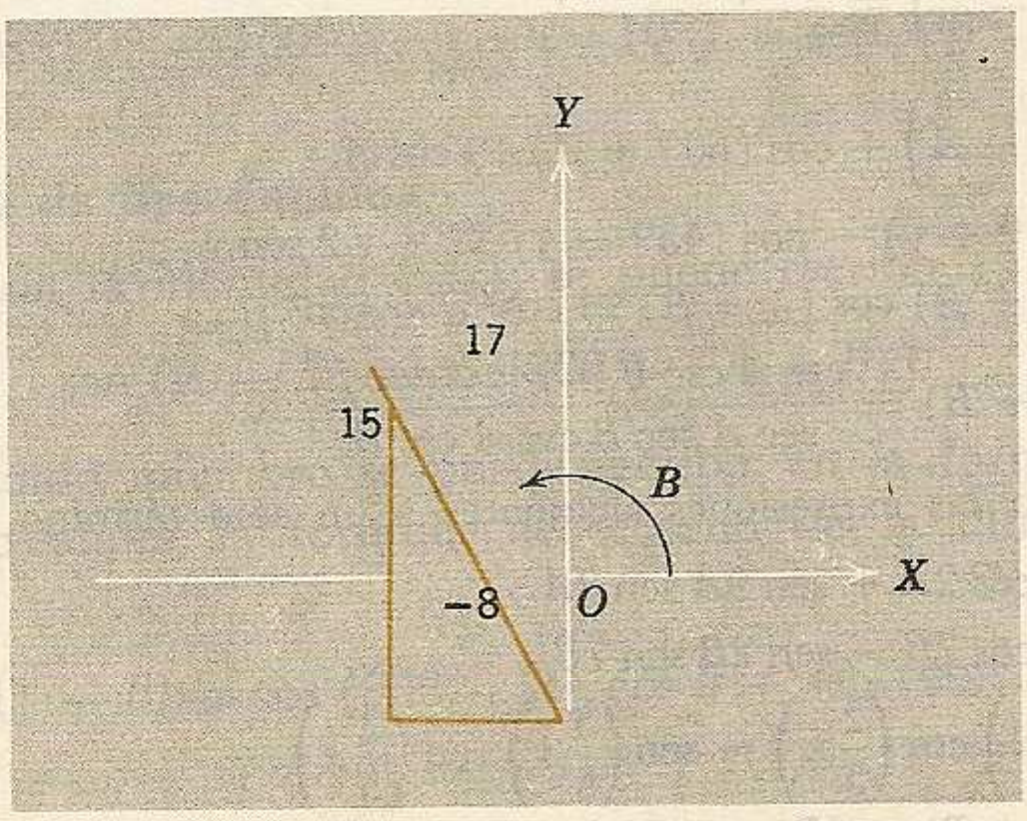


Figura 7.2-4

P_2OP_1 se puede expresar en una de las formas: $(A - B)$, $(B - A)$, $[(A - B) \pm n \cdot 360°]$, y $[(B - A) \pm n \cdot 360°]$, en donde n es un número entero.

a) $A = 80°$, $B = 20°$. *b)* $A = 30°$, $B = 85°$.
c) $A = 125°$, $B = -205°$. *d)* $A = -20°$, $B = 150°$.
e) $A = 210°$, $B = 105°$. *f)* $B = -300°$, $A = -100°$.
g) $A = -150°$, $B = 1500°$. *h)* $A = 470°$, $B = -380°$.

2. Utilizando el valor exacto de las funciones trigonométricas de 30°, 45°, 60°, y de sus múltiplos enteros, calcule el valor exacto de:

a) cos 15°. *b)* cos 105°. *c)* cos 90°.
d) cos 165°. *e)* cos 195°. *f)* cos 255°.
g) cos 285°. *h)* cos 345°. *i)* cos 375°.

3. Mediante el uso de las identidades 7.2-4 y 7.2-6, demuestre que las siguientes fórmulas son válidas para todo ángulo θ. ¿Cuáles de ellas son comparables a la regla de reducción?

a) $\cos(180° - \theta) \equiv -\cos\theta$. *b)* $\cos(180° + \theta) \equiv -\cos\theta$.
c) $\cos(360° - \theta) \equiv \cos\theta$. *d)* $\cos(90° - \theta) \equiv \operatorname{sen}\theta$.
e) $\cos(90° + \theta) \equiv -\operatorname{sen}\theta$. *f)* $\cos(270° - \theta) \equiv -\operatorname{sen}\theta$.
g) $\cos(270° + \theta) \equiv \operatorname{sen}\theta$.

4. Escriba las identidades del problema 3 en términos de números reales.

5. Si los ángulos A y B quedan en el cuadrante que se indica, calcule los valores de $\cos(A + B)$ y de $\cos(A - B)$, si

a) $\operatorname{sen} A = \frac{5}{13}$, $\cos B = \frac{4}{5}$, A y B en CI.

b) $\cos A = -\frac{12}{13}$, A en CII, $\cot B = \frac{5}{12}$, B en CIII.

c) $\tan A = -\frac{15}{8}$, A en CIV, $\sec B = \frac{5}{4}$, B en CIV.

d) $\tan A = -\frac{24}{7}$, A en CII, $\sec B = -\frac{17}{15}$, B en CIII.

6. Verifique las identidades siguientes

a) $\cos(\theta - 30°) \equiv \dfrac{\sqrt{3}\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{2}$.

b) $\cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \equiv \dfrac{\cos\phi + \operatorname{sen}\phi}{\sqrt{2}}$.

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - A\right) + \cos(60° + A) \equiv \cos A$.

d) $\cos(45° + y) - \cos(45° - y) \equiv -\sqrt{2}\operatorname{sen} y$.

e) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) \equiv \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta$.

f) $\cos(A - B) \equiv \dfrac{\csc A \csc B + \sec A \sec B}{\sec A \sec B \csc A \csc B}$.

7. Reduzca las expresiones siguientes a un solo término.

a) $\cos 9A \cos 2A + \operatorname{sen} 9A \operatorname{sen} 2A$.

b) $\cos 2B \cos 7B - \operatorname{sen} 2B \operatorname{sen} 7B$.

c) $\cos\left(\frac{3}{5}x\right)\cos\left(\frac{2}{5}x\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{3}{5}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)$.

d) $\cos(A - B)\cos B - \operatorname{sen}(A - B)\operatorname{sen} B$.

8. Obtenga una fórmula para $\cos(A + B + C)$ en términos de senos y cosenos de A, B y C. (*Sugerencia:* escriba el argumento como $[(A + B) + C]$).

9. Si A y B son ángulos agudos positivos.

a) Calcule $\cos A$, si $\cos(A - B) = \frac{24}{25}$ y $\cos B = \frac{3}{5}$.

b) Calcule $\operatorname{sen} B$, si $\cos(A + B) = \frac{13}{85}$ y $\operatorname{sen} A = \frac{4}{5}$.

10. Halle el conjunto de soluciones para el cual $\cos(\pi + A + B) = \cos(A - B)$, es decir, el conjunto de los valores de A y B que satisfacen la igualdad.

7.3. FORMULAS DE ADICION PARA LAS FUNCIONES SENO Y TANGENTE

Para deducir las fórmulas relativas al seno de la suma y de la diferencia de dos ángulos, se necesitan las identidades $\cos(90° - B) \equiv \operatorname{sen} B$, y $\operatorname{sen}(90° - B) \equiv \cos B$, que se demuestran como sigue:

En la identidad $\cos(A - B) \equiv \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$, haga $A = 90°$; resulta $\cos(90° - B) \equiv \cos 90° \cos B + \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen} B$. Como $\cos 90° = 0$ y $\operatorname{sen} 90° = 1$, tenemos

$$\cos(90° - B) \equiv \operatorname{sen} B. \tag{7.3-1}$$

En la identidad anterior, 7.3-1, sustituya B por $(90° - B)$:

$$\cos[90° - (90° = B)] \equiv \operatorname{sen}(90° - B),$$

ó

$$\cos B \equiv \operatorname{sen}(90° - B),$$

o todavía

$$\operatorname{sen}(90° - B) \equiv \cos B. \tag{7.3-2}$$

Las identidades 7.3-1 y 7.3-2, conjuntamente con las identidades fundamentales del capítulo 5, demuestran que las *cofunciones de ángulos complementarios son iguales*. Por ejemplo, $100°$ y $-10°$ son ángulos complementarios. Por lo tanto,

$$\cos(90° - 100°) = \cos(-10°) = \operatorname{sen} 100°.$$

Seno de la suma de dos ángulos

De acuerdo con la identidad 7.3-1, se puede escribir

$$\operatorname{sen}(A + B) \equiv \cos[90° - (A + B)].$$

A su vez, el segundo miembro se puede escribir en la forma $\cos[(90° - A) - B]$; usando ahora la fórmula del coseno de la diferencia de dos ángulos, se tiene

$$\cos[(90° - A) - B] \equiv \cos(90° - A)\cos B + \operatorname{sen}(90° - A)\operatorname{sen} B.$$

Pero

$$\cos(90° - A) \equiv \operatorname{sen} A, \text{ y } \operatorname{sen}(90° - A) \equiv \cos A,$$

Entonces,

$$\text{(7.3-3)} \qquad \mathbf{sen\ (A + B) \equiv sen\ A\ cos\ B + cos\ A\ sen\ B.}$$

Seno de la diferencia de dos ángulos

Sustituyendo en la identidad (7.3-3) el valor de B por $(-B)$ se obtiene:

$$\text{sen}\,[A + (-B)] \equiv \text{sen}\,A \cos(-B) + \cos A\,\text{sen}\,(-B).$$

Expresando las funciones de ángulos negativos como funciones de ángulos positivos, resulta

$$\text{(7.3-4)} \qquad \mathbf{sen(A - B) \equiv sen\ A\ cos\ B - cos\ A\ sen\ B.}$$

Tangente de la suma de dos ángulos

$$\tan(A + B) \equiv \frac{\text{sen}\,(A + B)}{\cos(A + B)},$$

$$\equiv \frac{\text{sen}\,A\cos B + \cos A\,\text{sen}\,B}{\cos A\cos B - \text{sen}\,A\,\text{sen}\,B}.$$

Dividiendo numerador y denominador entre $\cos A \cos B$, se obtiene

$$\tan(A + B) \equiv \frac{\dfrac{\text{sen}\,A\cos B}{\cos A\cos B} + \dfrac{\cos A\,\text{sen}\,B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B} - \dfrac{\text{sen}\,A\,\text{sen}\,B}{\cos A\cos B}},$$

ó

$$\mathbf{\tan(A + B) \equiv \frac{tan\ A + tan\ B}{1 - tan\ A\ tan\ B}.}$$

Tangente de la diferencia de dos ángulos

En la identidad anterior (7.3-5), se sustituye B por $-B$, y se obtiene

$$\tan[A + (-B)] \equiv \frac{\tan A + \tan(-B)}{1 - \tan A \tan(-B)}.$$

y como $\tan(-B) \equiv -\tan B$,

$$\text{(7.3-6)} \qquad \mathbf{\tan(A - B) \equiv \frac{tan\ A - tan\ B}{1 + tan\ A\ tan\ B}.}$$

Ejemplo: Demuestre que para $a > 0$ y $b > 0$, la suma de funciones $\boldsymbol{a\,\text{sen}\,x + b\cos x}$, es igual a una función seno.

Solución: $a\,\text{sen}\,x + b\cos x$, se puede escribir como

$$\text{(7.3-7)} \qquad \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,\text{sen}\,x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x\right).$$

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ los catetos de un triángulo rectángulo, y α uno de sus ángulos agudos (figura 7.3-1), entonces

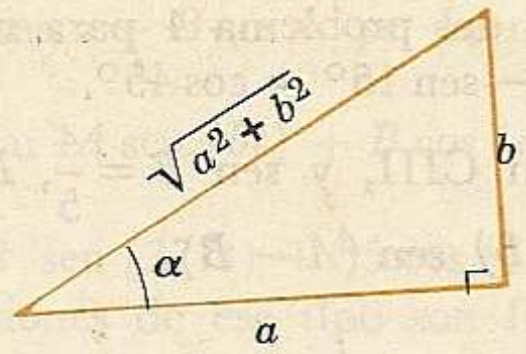


Figura 7.3-1

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha \text{ y } \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \operatorname{sen}\alpha.$$

Sustituyendo estas expresiones en la expresión 7.3-7, se obtiene

$$\sqrt{a^2+b^2}\,(\operatorname{sen} x\cos\alpha + \cos x \operatorname{sen}\alpha),$$

expresión que se puede escribir en la forma

$$\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x+\alpha),$$

esto es,

$$\boldsymbol{a\operatorname{sen} x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x+\alpha),}$$

donde

$$\boldsymbol{\tan\alpha = \frac{a}{b}.}$$

En la sección 11-4 se hará extensivo el procedimiento anterior a valores cualesquiera de a y b.

EJERCICIOS 7.3

1. Expresar con palabras las fórmulas de adición para las funciones seno y tangente.

2. Haciendo uso de las identidades 7.3-1 y 7.3-2, muestre que las cofunciones de ángulos complementarios son iguales, o sea que

$$\text{co-}T(90^\circ - \theta) \equiv T(\theta).$$

3. Utilizando los valores exactos de las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, y de sus múltiplos enteros, calcule los valores exactos del seno y de la tangente de los ángulos siguientes:

a) 15°; *b)* 75°; *c)* 105°; *d)* 90°; *e)* 165°; *f)* 195°; *g)* 225°; *h)* 285°; *i)* 345°; *j)* 375°.

4. Haciendo uso de las identidades 7.3-3, 7.3-4, 7.3-5 y 7.3-6, demuestre que las identidades siguientes son válidas para todo ángulo θ. ¿Cuáles de ellas son comparables con la regla de reducción?

a) $\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) \equiv \operatorname{sen}\theta$.
b) $\operatorname{sen}(180^\circ + \theta) \equiv -\operatorname{sen}\theta$.
c) $\operatorname{sen}(360^\circ - \theta) \equiv -\operatorname{sen}\theta$.
d) $\operatorname{sen}(90^\circ + \theta) \equiv \cos\theta$.
e) $\operatorname{sen}(270^\circ - \theta) \equiv -\cos\theta$.
f) $\operatorname{sen}(270^\circ + \theta) \equiv -\cos\theta$.
g) $\tan(180^\circ - \theta) \equiv -\tan\theta$.
h) $\tan(180^\circ + \theta) \equiv \tan\theta$.
i) $\tan(360^\circ - \theta) \equiv -\tan\theta$.
j) $\tan(90^\circ + \theta) \equiv -\cot\theta$.
k) $\tan(270^\circ - \theta) \equiv \cot\theta$.
l) $\tan(270^\circ + \theta) \equiv -\cot\theta$.

5. Escriba las identidades del problema 4 para números reales.

6. Muestre que $\cos 15° - \operatorname{sen} 15° = \cos 45°$.

7. Si $\cos A = -\frac{5}{13}$, A en CIII, y $\operatorname{sen} B = \frac{4}{5}$, B en CI, halle:

a) $\operatorname{sen}(A + B)$. *b)* $\operatorname{sen}(A - B)$. *c)* $\tan(A + B)$.

d) $\tan(A - B)$.

8. Si $\tan A = \frac{24}{7}$, $\cos A < 0$, y $\sec B = \frac{5}{4}$, $\csc B < 0$, halle:

a) $\operatorname{sen}(A + B)$. *b)* $\operatorname{sen}(A - B)$. *c)* $\tan(A + B)$.

d) $\tan(A - B)$.

9. Si $\operatorname{sen} A = \frac{8}{17}$, A en CI, y $\tan B = -\frac{24}{7}$, B en CIV, halle:

a) $\operatorname{sen}(A + B)$. *b)* $\operatorname{sen}(A - B)$. *c)* $\tan(A + B)$.

d) $\tan(A - B)$.

10. Calcule $\operatorname{sen} A$, si $\operatorname{sen}(A + B) = \frac{77}{85}$ y $\operatorname{sen} B = \frac{15}{17}$ si ambos ángulos son agudos y positivos.

11. Halle el conjunto de soluciones para el cual $\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}(A - B)$.

12. Verifique las identidades siguientes:

a) $\operatorname{sen}(x + 60°) \equiv \dfrac{\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x}{2}$.

b) $\operatorname{sen}\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right) \equiv \dfrac{\operatorname{sen}\phi - \cos\phi}{\sqrt{2}}$.

c) $\operatorname{sen}(A + B)\operatorname{sen}(A - B) \equiv \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B$.

d) $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \equiv \dfrac{\sqrt{3}\tan x + 1}{\sqrt{3} - \tan x}$.

e) $\tan(A - 45°) \equiv \dfrac{-1 + \tan A}{1 + \tan A}$.

f) $\tan\phi - \tan\theta \equiv \dfrac{\operatorname{sen}(\phi - \theta)}{\cos\phi\cos\theta}$.

13. Reduzca cada expresión a una sola función trigonométrica.

a) $\operatorname{sen} 5A\cos 2A + \cos 5A \operatorname{sen} 2A$.

b) $\operatorname{sen} 3B\cos B - \cos 3B \operatorname{sen} B$.

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{2}{7}x\right)\cos\left(\frac{5}{7}x\right) + \cos\left(\frac{2}{7}x\right)\operatorname{sen}\left(\frac{5}{7}x\right)$.

d) $\operatorname{sen}(A - B)\cos B + \cos(A - B)\operatorname{sen} B$.

e) $\dfrac{\tan 5A + \tan 3A}{1 - \tan 5A \tan 3A}$. *f)* $\dfrac{-\tan 3A + \tan 7A}{\tan 3A \tan 7A + 1}$.

g) $\dfrac{\tan\left(\frac{2}{5}A\right) + \tan\left(\frac{3}{5}A\right)}{1 - \tan\left(\frac{2}{5}A\right)\tan\left(\frac{3}{5}A\right)}$. *h)* $\dfrac{\tan(A + B) - \tan C}{1 + \tan(A + B)\tan C}$.

14. Obtenga una expresión para $\operatorname{sen}(A + B + C)$ en términos de senos y cosenos de A, B y C. (*Sugerencia:* escriba $(A + B + C)$ como $[(A + B) + C]$).

15. Obtenga una expresión para $\tan(A + B + C)$ en términos de las tangentes de A, B y C.

16. Exprese lo siguiente como una función seno:

a) $3\operatorname{sen} x + 4\cos x$. *b)* $35\operatorname{sen} t + 12\cos t$.

c) $\operatorname{sen} 2x + \sqrt{3}\cos 2x$. *d)* $8\cos 3t + 15\operatorname{sen} 3t$.

17. Demuestre que $A \operatorname{sen} x - B \cos x$, se puede expresar como una función seno.

18. ¿Es posible expresar $A \operatorname{sen}(bt) + B \cos(ct)$ como una función seno si $b \neq c$?

19. Demuestre que $48 \operatorname{sen}(377t) + 55 \cos(377t)$ se puede expresar como una función seno. (Expresiones de ese tipo son frecuentes en electricidad.)

20. Escriba $a \cos x + b \operatorname{sen} x$ en términos de $\cos(x - \alpha)$; defina α y establezca las restricciones sobre a y b, si las hay.

21. Use el problema 2 para mostrar que en toda identidad trigonométrica de un solo argumento, $T(\theta)$ se puede reemplazar por co-$T(\theta)$ y la expresión resultante es también una identidad.

7.4. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DEL ARGUMENTO DOBLE

Si en las identidades para $\operatorname{sen}(A + B)$, $\cos(A + B)$ y $\tan(A + B)$, se hace $B = A$, se obtienen identidades para $\operatorname{sen} 2A$, $\cos 2A$ y $\tan 2A$; por ejemplo, $\operatorname{sen}(A + A) \equiv \operatorname{sen} A \cos A + \cos A \operatorname{sen} A$, o sea

$$\textbf{sen } 2A \equiv 2 \textbf{ sen } A \textbf{ cos } A. \tag{7.4-1}$$

De manera análoga, se pueden obtener

$$\cos 2A \equiv \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A, \tag{7.4-2}$$

ó

$$\cos 2A \equiv 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A, \tag{7.4-3}$$

ó

$$\cos 2A \equiv 2 \cos^2 A - 1. \tag{7.4-4}$$

También,

$$\tan 2A \equiv \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}. \tag{7.4-5}$$

(¿De qué manera se obtuvieron 7.4-3 y 7.4-4?)

Note que el argumento del primer miembro es el *doble* del argumento del segundo miembro, razón por la cual reciben el nombre de identidades de

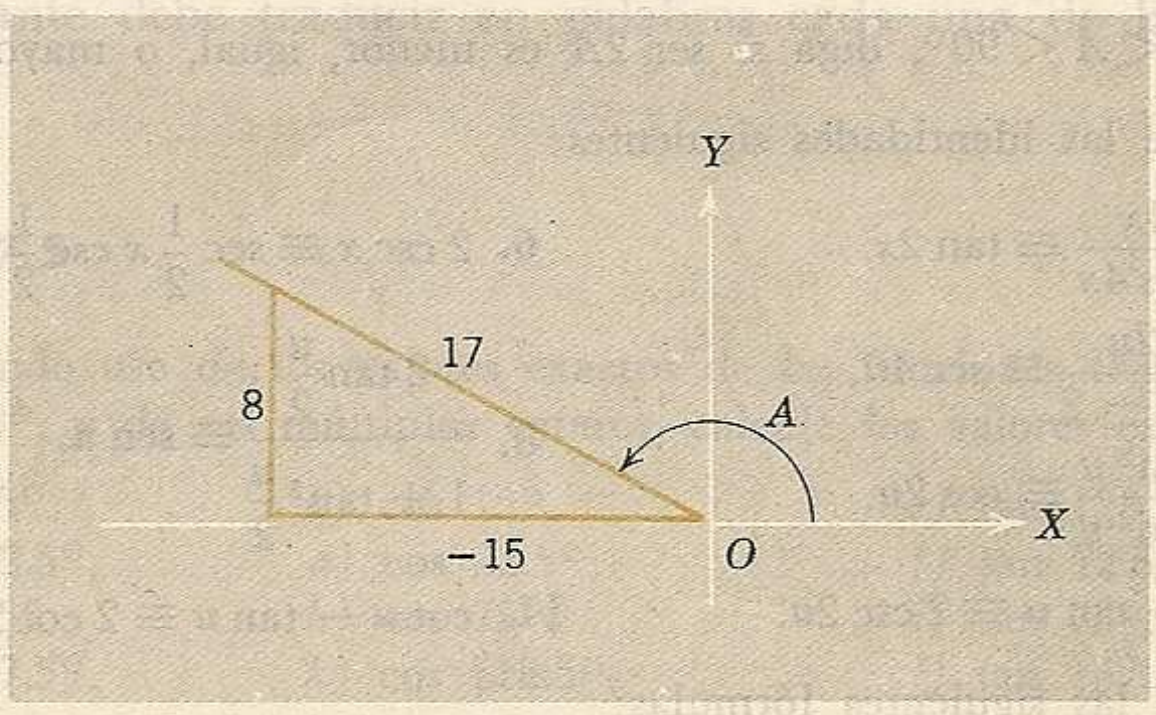


Figura 7.4-1

argumento doble. El estudiante debe traducir en palabras cada una de esas identidades.

Ejemplo. Halle $\operatorname{sen} 2A$, si $\operatorname{sen} A = \frac{8}{17}$ y A queda en CII.

Solución: En la figura 7.4-1 se ve que

$$\cos A = -\tfrac{15}{17};$$

entonces

$$\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A,$$

$$= 2\left(\tfrac{8}{17}\right)\left(-\tfrac{15}{17}\right).$$

$$\textbf{sen } \mathbf{2}A = -\tfrac{240}{289}.$$

EJERCICIOS 7.4

1. Calcule $\operatorname{sen} 2A$, $\cos 2A$, $\tan 2A$, para los valores dados:

a) $\csc A = \frac{5}{3}$, A en CI. *b)* $\operatorname{sen} A = \frac{7}{25}$, A en CII.

c) $\sec A = -\frac{17}{8}$, A en CIII. *d)* $\tan A = \frac{5}{12}$, A en CIII.

2. Reduzca cada una de las expresiones siguientes a una sola función trigonométrica. Los denominadores son diferentes de cero.

a) $2 \operatorname{sen} 5x \cos 5x$. *b)* $\cos^2 3y - \operatorname{sen}^2 3y$.

c) $\dfrac{2 \tan \frac{1}{2}t}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}t}$. *d)* $2 \cos^2 \dfrac{3\phi}{2} - 1$.

e) $\operatorname{sen} 6A \cos 6A$. *f)* $1 - 2 \operatorname{sen}^2 \left(\dfrac{x}{2}\right)$.

g) $\dfrac{\tan 3t}{1 - \tan^2 3t}$. *h)* $2 \operatorname{sen} \left(\dfrac{A+B}{2}\right) \cos \left(\dfrac{A+B}{2}\right)$.

i) $\cos^4 A - \operatorname{sen}^4 A$.

3. Deduzca, en términos de A, una fórmula para cada una de las expresiones siguientes:

a) $\operatorname{sen} 3A$. *b)* $\cos 3A$. *c)* $\tan 3A$.

4. Si $0° < A < 90°$, diga si $\operatorname{sen} 2A$ es menor, igual, o mayor que $2 \operatorname{sen} A$.

Demuestre las identidades siguientes:

5. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{1 + \cos 4x} \equiv \tan 2x$.

6. $2 \csc x \equiv \sec \dfrac{1}{2}x \csc \dfrac{1}{2}x$.

7. $\dfrac{\csc^2 2u}{\csc^2 2u - 2} \equiv \sec 4u$.

8. $\dfrac{2 \tan \frac{u}{2}}{1 + \tan^2 \frac{u}{2}} \equiv \operatorname{sen} u$.

9. $\dfrac{1 - \tan^2 u}{1 + \tan^2 u} \equiv \cos 2u$.

10. $\tan u + \cot u \equiv 2 \csc 2u$.

11. $\cot u - \tan u \equiv 2 \cot 2u$.

12. Pruebe las siguientes fórmulas:

a) 7.4-2; *b)* 7.4-3; *c)* 7.4-4; *d)* 7.4-5.

7.5. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DEL ARGUMENTO MITAD

Despejando $\cos\theta$ de la identidad $\cos 2\theta \equiv 1 - 2\,\text{sen}^2\,\theta$, se obtiene

$$\text{sen}\,\theta \equiv \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}.$$

Para hacer hincapié en el hecho de que el *argumento del primer miembro* es **la mitad** del *argumento del segundo miembro*, se sustituye θ por $A/2$:

(7.5-1) $$\textbf{sen}\,\frac{A}{2} \equiv \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1-\cos A}}{\mathbf{2}}},$$

donde el signo está determinado por el cuadrante de $A/2$.

De manera análoga, utilizando la identidad $\cos 2\theta \equiv 2\cos^2\theta - 1$ y sustituyendo θ por $A/2$, se obtiene

(7.5-2) $$\textbf{cos}\,\frac{A}{2} \equiv \pm\sqrt{\frac{\mathbf{1+\cos A}}{\mathbf{2}}},$$

donde el signo queda determinado por el cuadrante de $A/2$.

La identidad para $\tan(A/2)$ se obtiene de $\tan\frac{A}{2} \equiv \frac{\text{sen}\,(A/2)}{\cos(A/2)}$ y multiplicando el numerador y el denominador del segundo miembro por 2 sen $(A/2)$:

$$\tan\frac{A}{2} \equiv \frac{2\,\text{sen}^2\,(A/2)}{2\,\text{sen}\,(A/2)\cos(A/2)}.$$

Por 7.4-3 y 7.4-1, la expresión anterior se reduce a

(7.5-3) $$\textbf{tan}\,\frac{A}{2} \equiv \frac{\mathbf{1-\cos A}}{\textbf{sen}\,\boldsymbol{A}}.$$

De manera análoga, se puede demostrar que

(7.5-4) $$\textbf{tan}\,\frac{A}{2} \equiv \frac{\textbf{sen}\,\boldsymbol{A}}{\mathbf{1+\cos A}}.$$

El estudiante debe traducir en palabras cada una de las identidades anteriores.

EJERCICIOS 7.5

1. Haciendo uso de los valores exactos de las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, y de sus múltiplos enteros, calcule los valores exactos de

a) sen 15°.	*b)* cos 15°.	*c)* tan 15°.
d) sen 22.5°.	*e)* cos 22.5°.	*f)* tan 22.5°.
g) sen 75°.	*h)* cos 75°.	*i)* tan 75°.
j) sen 67.5°.	*k)* cos 112.5°.	*l)* tan 157.5°.

2. Calcule sen $(A/2)$, cos $(A/2)$ y tan $(A/2)$ para los valores dados:

a) $\csc A = \frac{25}{7}$, A en CI. *b)* $\cot A = \frac{15}{8}$, A en CIII.

c) $\cos A = -\frac{5}{13}$, A en CII. *d)* $\cos A = \frac{12}{37}$, A en CIV.

3. Reduzca cada una de las expresiones siguientes a un solo término. Los denominadores son diferentes de cero.

a) $\sqrt{\frac{1 + \cos 6\alpha}{2}}$. *b)* $\frac{1 - \cos 4A}{\operatorname{sen} 4A}$.

c) $\sqrt{\frac{1 - \cos 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha}}$. *d)* $\frac{\operatorname{sen} 7B}{1 - \cos 7B}$.

e) $\sqrt{\frac{9 - 9\cos 8y}{2}}$.

4. Verifique las siguientes identidades. Los denominadores son diferentes a cero.

a) $\cot 2y \equiv \frac{\operatorname{sen} 4y}{1 - \cos 4y}$. *b)* $2\cos^2 A \equiv \frac{1 + \sec 2A}{\sec 2A}$.

c) $\frac{\cos 2t}{1 - \operatorname{sen} 2t} \equiv \frac{1 + \tan t}{1 - \tan t}$. *d)* $\tan \frac{\theta}{2} \equiv \csc \theta - \cot \theta$.

e) $\frac{\cos 4u}{1 + \operatorname{sen} 4u} \equiv \frac{1 - \tan 2u}{1 + \tan 2u}$.

5. Establezca los valores no negativos de $A < 720°$, para los cuales las fórmulas siguientes son ciertas.

a) $\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$. *b)* $\operatorname{sen} \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$.

c) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$. *d)* $\cos \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$.

e) $\tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$. *f)* $\tan \frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$.

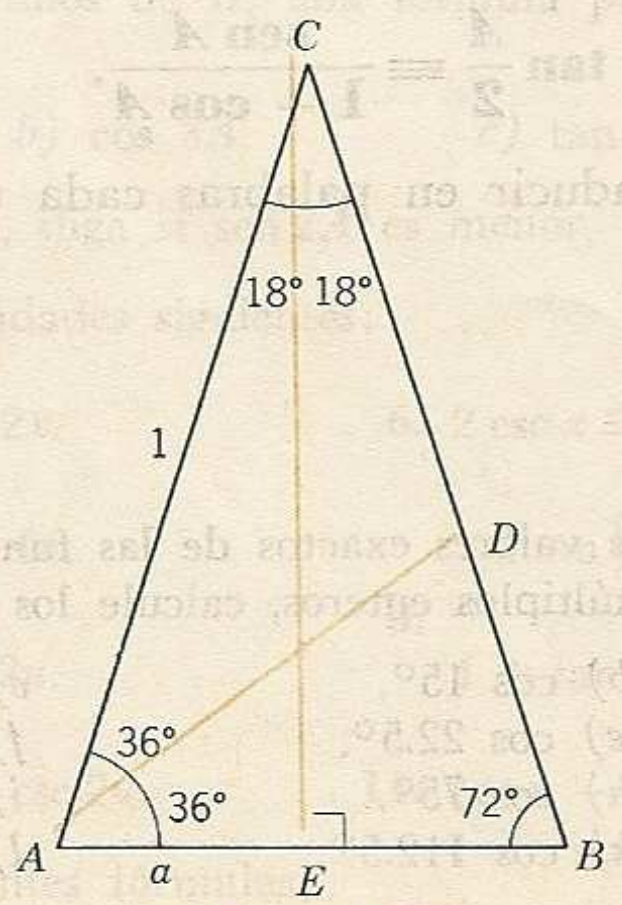


Figura 7.5-1

6. Pruebe cada una de las siguientes fórmulas

a) 7.5-2; *b)* 7.5-3; *c)* 7.5-4.

7. El valor exacto de cos 72° puede hallarse mediante el triángulo isósceles ABC, donde $\measuredangle C = 36°$ (figura 7.5-1). Sea AD la bisectriz de A; entonces los triángulos ABD y ADC son isósceles. Si $AE = a$ y $AC = 1$, muestre que $AB = 2a$ y $BD = 1 - 2a$; luego use los triángulos semejantes ABD y ABC para establecer que

$$\frac{2a}{1} = \frac{1 - 2a}{2a}$$

y de esta ecuación despeje a para mostrar que

$$\cos 72° = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

8. Use el resultado del problema 7 para hallar los valores exactos del coseno de:

a) 36°; *b)* 180°; *c)* 9°; *d)* 6°. [*Sugerencia:* Halle cos 15° del cos 30° y después cos 6° = cos (15° − 9°).] *e)* 3°.

7.6, FORMULAS DE TRANSFORMACION DE SUMAS A PRODUCTOS Y VICEVERSA

En cursos superiores de matemáticas se presenta frecuentemente la necesidad de expresar el producto de dos funciones trigonométricas en términos de sumas o diferencias, y viceversa.

Si se efectúa la suma de sen $(A + B)$ y sen $(A - B)$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\operatorname{sen}(A + B) \equiv \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B, \\ &\operatorname{sen}(A - B) \equiv \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B \end{aligned}$$

$$\overline{\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B) \equiv 2 \operatorname{sen} A \cos B}$$

ó

$$(7.6\text{-}1) \qquad \mathbf{\operatorname{sen} A \cos B \equiv \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)].}$$

Restando sen $(A - B)$ de sen $(A + B)$, y simplificando, resulta

$$(7.6\text{-}2) \qquad \mathbf{\cos A \operatorname{sen} B \equiv \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)].}$$

Sumando y simplificando las fórmulas de cos $(A + B)$ y cos $(A - B)$, se obtiene

$$(7.6\text{-}3) \qquad \mathbf{\cos A \cos B \equiv \tfrac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)].}$$

Restando cos $(A - B)$ de cos $(A + B)$, y simplificando, se obtiene

$$(7.6\text{-}4) \qquad \mathbf{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \equiv -\tfrac{1}{2}[\cos(A + B) - \cos(A - B)].}$$

Las fórmulas para la suma de dos funciones trigonométricas se pueden obtener a partir de las anteriores haciendo $u = A + B$ y $v = A - B$. De esta manera, $A = \frac{1}{2}(u + v)$ y $B = \frac{1}{2}(u - v)$. Reescribiendo las fórmulas anteriores con estas sustituciones se tiene:

(7.6-5) $$\textbf{sen } u + \textbf{sen } v \equiv \mathbf{2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u + v) \cos \tfrac{1}{2}(u - v)}.$$

(7.6-6) $$\textbf{sen } u - \textbf{sen } v \equiv \mathbf{2 \cos \tfrac{1}{2}(u + v) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u - v)}.$$

(7.6-7) $$\textbf{cos } u + \textbf{cos } v \equiv \mathbf{2 \cos \tfrac{1}{2}(u + v) \cos \tfrac{1}{2}(u - v)}.$$

(7.6-8) $$\textbf{cos } u - \textbf{cos } v \equiv \mathbf{2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u + v) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u - v)}.$$

Ejemplo. En el cálculo, para obtener la derivada de la función sen x, se necesita transformar la expresión sen $(x + \Delta x)$ − sen x. Muestre que dicha expresión se puede escribir como un producto.

Solución: en la fórmula

$$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v \equiv 2 \cos \tfrac{1}{2}(u + v) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u - v)$$

haga $u = x + \Delta x$, $v = x$. Entonces,

$$\operatorname{sen} (x + \Delta x) - \operatorname{sen} x \equiv 2 \cos \tfrac{1}{2}(2x + \Delta x) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\Delta x),$$

ó

$$\textbf{sen } (x + \Delta x) - \textbf{sen } x \equiv \mathbf{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2}}.$$

EJERCICIOS 7.6

Verifique las siguientes identidades:

1. Pruebe cada una de las fórmulas de la 7.6-2 a la 7.6-8.

2. $\operatorname{sen} 3x \cos 2x \equiv \frac{1}{2}(\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} x)$.

3. $\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x \equiv \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x)$.

4. $2 \operatorname{sen} x \cos y \equiv \operatorname{sen} (x + y) + \operatorname{sen} (x - y)$.

5. $2 \operatorname{sen} 3u \cos 2v \equiv \operatorname{sen} (3u + 2v) + \operatorname{sen} (3u - 2v)$.

6. $\operatorname{sen} 60° + \operatorname{sen} 30° \equiv 2 \operatorname{sen} 45° \cos 15°$.

7. $\operatorname{sen} 50° - \operatorname{sen} 20° \equiv 2 \cos 35° \operatorname{sen} 15°$.

8. $\operatorname{sen} 10\theta + \operatorname{sen} 4\theta \equiv 2 \operatorname{sen} 7\theta \cos 3\theta$.

9. $\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 2x \equiv 2 \cos 5x \operatorname{sen} 3x$.

10. $\operatorname{sen} 3\theta + \operatorname{sen} \theta \equiv 2 \operatorname{sen} 2\theta \cos \theta$.

11. $\operatorname{sen} 3\theta - \operatorname{sen} \theta \equiv 2 \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta$.

12. $\operatorname{sen} 4\theta + \operatorname{sen} 2\theta \equiv 2 \operatorname{sen} 3\theta \cos \theta$.

13. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} \equiv \dfrac{\tan \frac{1}{2}(x + y)}{\tan \frac{1}{2}(x - y)}$.

14. $\dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\cos u + \cos v} \equiv \tan \tfrac{1}{2}(u + v)$.

15. $\dfrac{\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v}{\cos u - \cos v} \equiv -\cot \tfrac{1}{2}(u - v)$.

16. $\dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\cos u + \cos v} \equiv \tan \tfrac{1}{2}(u - v)$.

17. $\dfrac{\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v}{\cos v - \cos u} \equiv \cot \tfrac{1}{2}(u + v)$.

18. $\dfrac{\cos u + \cos v}{\cos v - \cos u} \equiv \cot \tfrac{1}{2}(u + v) \cot \tfrac{1}{2}(u - v)$.

7.7. SUMARIO

A continuación se dan todas las fórmulas obtenidas en este capítulo. Conviene que el estudiante las traduzca en palabras.

Suma y diferencia de dos ángulos

(7.2-4) $$\cos(A - B) \equiv \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

(7.2-6) $$\cos(A + B) \equiv \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

(7.3-3) $$\operatorname{sen}(A + B) \equiv \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B.$$

(7.3-4) $$\operatorname{sen}(A - B) \equiv \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B.$$

(7.3-5) $$\tan(A + B) \equiv \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

(7.3-6) $$\tan(A - B) \equiv \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}.$$

Argumento Doble

(7.4-1) $$\operatorname{sen} 2A \equiv 2 \operatorname{sen} A \cos A.$$

(7.4-2) $$\cos 2A \equiv \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A.$$

(7.4-3) $$\cos 2A \equiv 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A.$$

(7.4-4) $$\cos 2A \equiv 2 \cos^2 A - 1.$$

(7.4-5) $$\tan 2A \equiv \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

Argumento mitad

(7.5-1) $$\operatorname{sen} \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}.$$

(7.5-2) $$\cos \frac{A}{2} \equiv \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}.$$

(7.5-3) $$\tan \frac{A}{2} \equiv \frac{1 - \cos A}{\operatorname{sen} A}.$$

(7.5-4) $$\tan \frac{A}{2} \equiv \frac{\operatorname{sen} A}{1 + \cos A}.$$

Fórmulas de transformación en producto y en suma

(7.6-1) $$\operatorname{sen} A \cos B \equiv \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)].$$

(7.6-2) $$\cos A \operatorname{sen} B \equiv \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)].$$

(7.6-3) $$\cos A \cos B \equiv \tfrac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)].$$

(7.6-4) $$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \equiv -\tfrac{1}{2}[\cos (A + B) - \cos (A - B)].$$

(7.6-5) $$\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} v \equiv 2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u + v) \cos \tfrac{1}{2}(u - v).$$

(7.6-6) $$\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} v \equiv 2 \cos \tfrac{1}{2}(u + v) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u - v).$$

(7.6-7) $$\cos u + \cos v \equiv 2 \cos \tfrac{1}{2}(u + v) \cos \tfrac{1}{2}(u - v).$$

(7.6-8) $$\cos u - \cos v \equiv -2 \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u + v) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(u - v).$$

7.8. MISCELANEA DE IDENTIDADES

Las identidades fundamentales de la sección 5.2, junto con las de este capítulo, permiten la comprobación de otras muchas. Sin embargo, la facilidad para efectuar la prueba de una identidad sólo se alcanza a través del dominio de las operaciones algebraicas y de las identidades trigonométricas.

Ejemplo. Compruebe la identidad

$$\frac{\cos 2\theta + \cos \theta + 1}{\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{sen} \theta} \equiv \cot \theta.$$

Solución: Sustituya $\cos 2\theta$ por $2\cos^2 \theta - 1$ y $\operatorname{sen} 2\theta$ por $2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$. Se obtiene así

$$\frac{2\cos^2 \theta - 1 + \cos \theta + 1}{2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \operatorname{sen} \theta} \equiv \cot \theta,$$

que se reduce a

$$\frac{\cos \theta \ (2 \cos \theta + 1)}{\operatorname{sen} \theta \ (2 \cos \theta + 1)} \equiv \cot \theta,$$

o sea

$$\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \equiv \cot \theta,$$

Esto es,

$$\therefore \ \cot \theta \equiv \cot \theta.$$

EJERCICIOS 7.8

Verifique las identidades siguientes. Los denominadores son diferentes de cero.

1. $\dfrac{1 - \cos 2u}{\tan u} \equiv \operatorname{sen} 2u.$
2. $\dfrac{1 - \cos 2u}{\operatorname{sen} u} \equiv 2 \operatorname{sen} u.$
3. $2 \cos A - \operatorname{sen} 2A \csc A \equiv 0.$
4. $\cot A \operatorname{sen} 2A - 1 \equiv \cos 2A.$
5. $\cos 2A + \operatorname{sen} 2A \tan A \equiv 1.$
6. $\dfrac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \equiv \operatorname{sen} 2\theta.$
7. $2 \cos \theta - 2 \cos^3 \theta \equiv \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 2\theta.$

8. $\dfrac{2 \operatorname{sen} \alpha\,(1 - \operatorname{sen}^2 \alpha)}{\operatorname{sen} 2\alpha} \equiv \cos \alpha.$

9. $\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen} \theta} - \dfrac{\cos 2\theta}{\cos \theta} \equiv \sec \theta.$

10. $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha + \cos 2\alpha - 1}{\cos \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha} \equiv \tan \alpha.$

11. $\cos 2\beta \equiv \dfrac{1 - \tan^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta}.$

12. $\tan A + \cot A \equiv 2 \csc 2A.$

13. $\dfrac{\operatorname{sen} (A + B)}{\operatorname{sen} (A - B)} \equiv \dfrac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B}.$

14. $\dfrac{\operatorname{sen} 2A}{1 + \cos 2A} \equiv \tan A.$

15. $\dfrac{\operatorname{sen} 4\alpha}{\operatorname{sen} 2\alpha} \equiv 2 \cos 2\alpha.$

16. $\dfrac{2 \cos 3A}{\operatorname{sen} 2A} + \dfrac{\operatorname{sen} 2A}{\cos A} \equiv \dfrac{\cos 2A}{\operatorname{sen} A}.$

17. $\csc A - \cot A \equiv \tan \dfrac{A}{2}.$

18. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x \cos x}{(1 + \cos 2x)(1 + \cos x)} \equiv \tan \dfrac{x}{2}.$

19. $\dfrac{2 \cot A}{\csc^2 A - 2} \equiv \tan 2A.$

20. $\operatorname{sen} (A + B) \operatorname{sen} (A - B) \equiv \operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B.$

21. $\operatorname{sen} (A + B) \operatorname{sen} (B - A) \equiv \cos^2 A - \cos^2 B.$

22. $\cos (A + B) \cos (A - B) \equiv \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 B.$

23. $\dfrac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x} \equiv \sec 2x.$

24. $4 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \equiv 1 - \cos^2 2x.$

25. $\dfrac{\tan 2u}{\tan u} \equiv \dfrac{2 \cot^2 u}{\cot^2 u - 1}.$

26. $\cos 2A + 2 \operatorname{sen}^2 A \equiv 1.$

27. $\dfrac{\sec 2\theta - 1}{\sec 2\theta + 1} \equiv \tan^2 \theta.$

28. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} u - \cos u}{1 + \operatorname{sen} u + \cos u} \equiv \tan \dfrac{u}{2}.$

29. $\dfrac{\cos 3x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\cos x} \equiv 4 \cot 4x \cos 2x.$

30. $2(\operatorname{sen} 4B \cos 2B - \cos 4B \operatorname{sen} 2B)^2 \equiv 1 - \cos 4B.$

31. $\dfrac{1 - \cos 6\theta}{1 + \cos 6\theta} \equiv \sec^2 3\theta - 1.$

32. $\dfrac{\tan 2\theta + \tan \theta}{\tan 2\theta - \tan \theta} \equiv \operatorname{sen} 3\theta \csc \theta.$

33. $\dfrac{\operatorname{sen} 5u + \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} 3u - \operatorname{sen} u} \equiv 1 + 2 \cos 2u.$

34. $\operatorname{sen} u + \operatorname{sen} 2u + \operatorname{sen} 3u \equiv \operatorname{sen} 2u\,(1 + 2 \cos u).$

35. $\cos u + \cos 2u + \cos 3u \equiv \cos 2u\,(1 + 2 \cos u).$

36. $\cos 2u + \cos 4u + \cos 6u \equiv 4 \cos u \cos 2u \cos 3u - 1.$

37. $\cos u + \cos 3u + \cos 5u + \cos 7u \equiv 4 \cos u \cos 2u \cos 4u.$

38. $\dfrac{\cos 2x + \cos 7x}{\cos 3x + \cos 6x} + \dfrac{\cos 6x - \cos x}{\cos 5x - \cos 2x} \equiv \dfrac{2 \operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 3x}.$

39. $\dfrac{\operatorname{sen} 10u + \operatorname{sen} 6u}{\operatorname{sen} 12u + \operatorname{sen} 4u} - \dfrac{\operatorname{sen} 5u - \operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} 7u + \operatorname{sen} u} \equiv \dfrac{2 \operatorname{sen} 2u}{\operatorname{sen} 8u}.$

40. $\dfrac{\cos 6x + \cos 12x}{\operatorname{sen} 14x - \operatorname{sen} 4x} + \dfrac{\operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} x}{\cos 9x + \cos x} \equiv \dfrac{2 \cos 2x}{\operatorname{sen} 10x}.$

41. $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 3A}{\cos A + \cos 2A + \cos 3A} \equiv \tan 2A.$

42. $\operatorname{sen}^2 3v - \operatorname{sen}^2 v \equiv 2 \operatorname{sen}^2 2v \cos 2v.$

43. $\dfrac{\operatorname{sen} (u + 3v) + \operatorname{sen} (3u + v)}{\operatorname{sen} 2u + \operatorname{sen} 2v} \equiv 2 \cos (u + v)$

44. Si $A + B + C = 180°$, pruebe que $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cos \dfrac{A}{2} \cos \dfrac{B}{2} \cos \dfrac{C}{2}.$

45. Si $A + B + C = 180°$, pruebe que $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \operatorname{sen} \dfrac{A}{2} \operatorname{sen} \dfrac{B}{2} \operatorname{sen} \dfrac{C}{2}.$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 7

1. Exprese la fórmula del $\cos (A - B)$ en palabras.

2. Obtenga la identidad del $\cos (A - B)$.

3. Obtenga la identidad del $\cos (A + B)$.

4. Obtenga la identidad del $\operatorname{sen} (A + B)$.

5. Halle el valor exacto de $\tan 75°$.

6. Muestre que si A y B son complementarios, $\operatorname{sen} A \equiv \cos B$.

7. Si $\tan A = m_1$ y $\tan B = m_2$, muestre que

$$\tan (A - B) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

8. Complete cada una de las siguientes expresiones

a) $\operatorname{sen} 2u \equiv$. *b)* $\cos 2u \equiv$. *c)* $\tan 2u \equiv$.

d) $\operatorname{sen} \dfrac{n}{2} \equiv$. *e)* $\cos \dfrac{u}{2} \equiv$. *f)* $\tan \dfrac{u}{2} \equiv$.

9. Transforme $\cos 3v - \cos v$ en producto.

10. Si $\operatorname{sen} A = \dfrac{1}{2}$ y $\cos B = -\dfrac{3}{4}$, con A y B en el mismo cuadrante, halle $\cos (A - B)$.

11. Muestre que $\operatorname{sen} 40° + \operatorname{sen} 20° = \operatorname{sen} 80°$.

12. Muestre que $\cos 20° + \cos 100° + \cos 140° = 0$.

13. En el triángulo rectángulo ACB, muestre que

a) $\operatorname{sen} 2A = \dfrac{2ab}{c^2}$. *b)* $\cos 2A = \dfrac{b^2 - a^2}{c^2}$.

c) $\tan \dfrac{A}{2} = \dfrac{a}{b + c}$.

CAPITULO 8

Logaritmos

8.1. LOGARITMOS

En lo que sigue se dará únicamente un breve resumen acerca de logaritmos, suponiendo que el estudiante conoce el tema y que, por lo tanto, sólo se trata de realizar una revisión para volver a familiarizarse con su manejo.

Definición 8.1-1: *El logaritmo de un número* N*, es el exponente,* L*, al que es preciso elevar un número dado,* b*, denominado base, a fin de obtener el número* N*. Los números* N *y* b *son positivos y* $b \neq 1$.

Es decir, si

$$b^L = N$$

entonces,

$$L = \log_b N.$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{Log}_a N = L \leftrightarrow N = a^L$$

Esta última igualdad expresa que L es el logaritmo de base b del número N; el símbolo *log* es la abreviatura de *logaritmo*.

Existen dos números usados generalmente como base de logaritmos. Uno es el número 10 y el otro el decimal infinito 2.7182818284 59... comúnmente representado por la letra e. Los logaritmos de base 10 se denominan *logaritmos vulgares o de Briggs* y se representan por $\log N$. Los logaritmos de base e se denominan *logaritmos naturales o neperianos* y se representan por $ln\ N$ o por $\log_e N$. En este libro se considerarán únicamente los logaritmos vulgares.

A continuación daremos tres reglas relativas a operaciones (efectuadas con logaritmos) con dos números positivos M y N;

Regla 1. El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log (MN) = \log M + \log N.$$

Regla 2. El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log \left(\frac{M}{N}\right) = \log M - \log N.$$

Regla 3. El logaritmo de una potencia, es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base

$$\log M^p = p \log M.$$

La demostración de las reglas anteriores se deduce de la definición de logaritmo y las leyes de los exponentes.

Como cualquier número N se puede escribir en "notación científica" (artículo 3.3), se concluye que sólo es necesario conocer los logaritmos de los números comprendidos entre 1 y 10, y los de las potencias de 10. Por ejemplo,

$$N = n \cdot 10^c, \tag{8.1-1}$$

en donde $1 \leqq n < 10$, y $\boldsymbol{c}$ es un *entero*. Tomando logaritmos en ambos miembros de la ecuación (8.1-1), se tiene

$$\log N = \log n + \log 10^c,$$

o sea: (8.1-2)

$$\mathbf{\log N = \log n + c \log 10.}$$

Considere ahora las igualdades

$$\mathbf{10^0 = 1 \ \text{y} \ 10^1 = 10.}$$

y aplique la definición de logaritmo; se ve que $\mathbf{\log 1 = 0}$, y que $\mathbf{\log 10 = 1.}$

En consecuencia, la igualdad 8.1-2 es equivalente a

(8.1-3) $$\mathbf{\log N = \log n + c,}$$

en donde $\mathbf{0 \leqq \log n < 1.}$

Por su importancia, principalmente en el uso de tablas de logaritmos, las expresiones del segundo miembro de 8.1-3 reciben nombres especiales; a $\mathbf{\log n}$ *se le llama* ***mantisa*** de $\log N$ y se representa por $\boldsymbol{m}$, y $\boldsymbol{c}$ recibe el nombre de **característica** de $\log N$. Por lo tanto,

(8.1-4) $$\mathbf{\log N = M + c}$$

Los valores de la mantisa, $\boldsymbol{m}$, se pueden hallar en las tablas de logaritmos y son siempre fracciones *positivas* menores que la unidad. La característica, $\boldsymbol{c}$, se determina escribiendo el número en notación científica, y recordando que c es el exponente de 10.

Ejemplo 1. Halle la característica de los logaritmos de *a)* 234. *b)* 0.00234.

Solución: *a)* $234 = 2.34 \times 10^2$, por tanto, $\boldsymbol{c = 2.}$

b) $0.00234 = 2.34 \times 10^{-3}$, por tanto, $\boldsymbol{c = -3.}$

Por comodidad en las operaciones con logaritmos, es frecuente cambiar una característica negativa por otra positiva, mediante el simple procedimiento de sumarla o restarla de un múltiplo de 10. Esto es, si la característica de un logaritmo es -3 y su mantisa 0.2879, el logaritmo se puede escribir como $7.2879 - 10$.

El **cologaritmo** de un número es el logaritmo del recíproco del número.

Así:

$$\operatorname{colog} N = \log \frac{1}{N},$$

o sea,

$$\operatorname{colog} N = \log 1 - \log N.$$

Puesto que $\log 1 = 0$, se concluye que

$$\mathbf{\operatorname{colog} N = -\log N.}$$

Con objeto de evitar el uso de logaritmos negativos se determina el cologaritmo de un número restando su logaritmo de $10 - 10$. Para tablas de cuatro decimales, la sustracción de hacerse de $10.0000 - 10$.

Ejemplo 2. Dado $\log 323 = 2.5092$, determine colog 323.

Solución: Reste $\log 323 = 2.5092$ de $10.0000 - 10$. La operación se puede hacer mentalmente restando cada cifra de 9, a partir de la izquierda y la última cifra diferente de cero, de 10. Esto es

$$\begin{array}{rrr} & 9.999 & 10 - 10 \\ \log 323 = & 2.509 & 2 \\ \hline \textbf{colog 323} = & \textbf{7.490} & \textbf{8 - 10} = \textbf{7.4908 - 10.} \end{array}$$

De la definición de cologaritmo se concluye que el resultado obtenido al restar un logaritmo es igual al que se obtiene al sumar su cologaritmo. Es decir

$$\log\left(\frac{M}{N}\right) = \log M + \operatorname{colog} N.$$

8.2. TABLAS DE LOGARITMOS

La tabla III, o tabla de logaritmos con cuatro decimales para los números del 1 al 10, proporciona la mantisa de los logaritmos de base 10, con cuatro cifras significativas. Para los números con no más de tres cifras significativas, sus logaritmos se leen directamente en la tabla. Para los números de más de tres cifras significativas se requiere interpolar (sección 2.6.).

Para obtener el logaritmo de un número se determina primero su característica, tal como se explicó en el artículo anterior. Para hallar la mantisa, con ayuda de una tabla de cuatro decimales, se localizan los dos primeros dígitos del número en la columna de la izquierda de la tabla y el tercer dígito en la fila superior de la tabla. La mantisa se encuentra en la intersección de la fila y la columna que corresponde a aquellos números.

Ejemplo 1. Hallar el logaritmo de 48.1.

Solución: Puesto que $48.1 = 4.81 \times 10^1$, la característica es 1. Se localiza 48 en la columna de la izquierda de la tabla y 1 en la fila superior. En la intersección de la fila que corresponde a 48 y de la columna que corresponde a 1, se encuentra la mantisa 0.6821.

Como la mantisa es un número positivo menor que la unidad, se tiene

$$\log 48.1 = 1.6821.$$

Ejemplo 2. Hallar N sabiendo que $\log N = 8.6937 - 10$.

Solución: La mantisa 0.6937, se denomina entrada tabular, y al localizarla en la tabla se observa que corresponde al número 494.

Como la característica es $8 - 10$, igual a -2, se tiene

$$N = 4.94 \times 10^{-2},$$

$$N = 0.0494.$$

Ejemplo 3. Halle el logaritmo de 47.36.

Solución: La característica es 1. Para obtener la mantisa se requiere interpolar:

$$\begin{array}{ccc} & N & m \\ 10\left[\begin{array}{c} 6\left[\begin{array}{c} 4730 \\ 4736 \end{array}\right. \\ \\ \left.\begin{array}{c} \\ 4740 \end{array}\right. \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0.6749 \\ \\ 0.6758 \end{array} & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right]x \\ & & \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right]9 \end{array}$$

$$\frac{6}{10} = \frac{x}{9}, \quad x = 5.4, \text{ redondeando, } x = 5.$$

Por lo tanto,

$$\textbf{log 47.36 = 1.6754.}$$

Como las funciones trigonométricas de los ángulos son números, es posible determinar los logaritmos de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, log sen 30° = log 0.5 = 9.6990 − 10. En la tabla IV se dan los logaritmos de base 10 de las funciones trigonométricas para ángulos de 0° a 90°, a intervalos de 10′.

En virtud de no ser tan fácil la determinación de la característica del logaritmo de una función trigonométrica, la tabla IV proporciona tanto la característica como la mantisa. Por comodidad, al ordenar la tabla se ha omitido la parte −10 de la característica. En consecuencia, para obtener el logaritmo correcto se debe añadir −10 al valor hallado en la tabla.

El valor del logaritmo de una función trigonométrica queda en la misma línea que el ángulo. Si el ángulo se lee en la columna de la *izquierda* de la tabla, hay que leer la función, cuyo logaritmo se desea, en la parte superior de la página. Si el ángulo se lee en la columna de la derecha de la página, hay que leer la función, cuyo logaritmo se desea, en la parte inferior de la página. El logaritmo de la función trigonométrica de un ángulo se obtiene en la intersección de la fila que corresponde al ángulo y de la columna que corresponde a la función. El logaritmo de sen θ se va a representar por log sen θ y análogamente para las otras funciones trigonométricas.

Ejemplo 4. Halle log tan 18°10′.

Solución: Puesto que el ángulo se lee en la columna de la izquierda de la página, la función se busca en la parte superior. En consecuencia,

$$\textbf{log tan 18°10′ = 9.5161 − 10.}$$

Note que para obtener la característica correcta fue necesario añadir −10.

Ejemplo 5. Halle θ $0° < \theta < 90°$ si log sen θ = 9.9505 − 10.

Solución: Busque en la tabla, en la columna *log sen* θ, el valor 9.9505; dicho valor está en una columna en la que *log sen* θ está al pie de la página; por lo tanto, el ángulo se lee a la derecha.
Así, para

$$\log \text{sen } \theta = 9.9505 - 10$$
$$\theta = \textbf{63°10′.}$$

Ejemplo 6. Halle A, $(0° < A < 90°)$ si $\log \cot A = 10.4859 - 10$.

Solución:

$$10\left[\begin{array}{cc} A & \log \cot A \\ 18°00' & 10.4882 - 10 \\ x\left[\begin{array}{c} \\ \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} \\ 10.4859 - 10 \end{array}\right]23 \\ 18°10' & 10.4839 - 10 \end{array}\right]43$$

$$\frac{x}{10} = \frac{23}{43}, \quad x = 5.3, \text{ redondeando, } x = 5.$$

Por tanto,

$$A = 18°05'.$$

EJERCICIOS 8.2

1. Compare el valor de $\log T(\theta)$ de la tabla IV, con el logaritmo del valor de $T(\theta)$ de la tabla I para:

a) cos 20°; *b)* tan 60°; *c)* sen 150°; *d)* cot 10°.

2. Halle lo siguiente

a) log 323. *b)* log 0.2385.
c) colog 23.7. *d)* colog 0.003672.
e) log sen 56°40′. *f)* log cos 23°20′.
g) log tan 17°20′. *h)* log cot 1°40′.
i) log sec 78°41′. *j)* log csc 43°31′.
k) log sen 12°38′. *l)* log cos 72°04′.
m) log tan 40°11′. *n)* log cot 56°17′.
o) log sec 9°27′. *p)* log csc 77°22′.

3. Halle el número o el ángulo agudo positivo si:

a) $\log M = 1.7292$. *b)* $\log N = 9.5843 - 10$.
c) $\log M = 8.9802$. *d)* $\log N = 7.9223 - 10$.
e) $\log N = 0.0667$. *f)* $\log A = 3.2775$.
g) $\log \operatorname{sen} A = 9.4781 - 10$. *h)* $\log \cos B = 9.6495 - 10$.
i) $\log \tan \theta = 10.5529 - 10$. *j)* $\log \cot \theta = 9.0071 - 10$.
k) $\log \sec A = 10.8752 - 10$. *l)* $\log \operatorname{sen} B = 9.9187 - 10$.
m) $\log \cos A = 9.7382 - 10$. *n)* $\log \tan \alpha = 9.9877 - 10$.
o) $\log \cot \alpha = 10.3352 - 10$. *p)* $\log \cos \beta = 9.9786 - 10$.

4. Demuestre las reglas para las operaciones con logaritmos. (*Sugestión*: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$).

8.3. OPERACIONES CON LOGARITMOS

A partir de este artículo, los problemas que sirven como ejemplo se resolverán usando una plantilla con el fin de ordenar las operaciones con logaritmos; en dicha plantilla, todo número que aparezca en una línea se referirá al primer número que aparezca a su izquierda en la misma línea. La plantilla se dispone de manera que sólo sea necesaria la *adición* de logaritmos, es decir, mediante el uso apropiado de cologaritmos, representados simbólicamente por *colog*; dicha plantilla se debe trazar antes

de anotar los números tal como se indicará en los ejemplos que siguen. En las operaciones logarítmicas se supondrá que la exactitud de los datos garantiza la respuesta con cuatro dígitos, a excepción hecha de los problemas en los que se debe buscar que las respuestas sean compatibles en relación a los datos que se proporcionan. Además de la plantilla que aquí usaremos, existen otras también satisfactorias; sin embargo, a menos que el profesor indique lo contrario, el estudiante debe emplear la que aquí se propone.

Ejemplo 1. Calcule por logaritmos el valor de la siguiente fracción

$$N = \frac{(3.14)\,(0.413)}{(6.12)\,(0.719)}.$$

Solución: Recuerde que al efectuar un producto se suman los logaritmos, y que al efectuar una división se suman los cologaritmos.

$$\log N = \log 3.14 + \log 0.413 + \operatorname{colog} 6.12 + \operatorname{colog} 0.719.$$

La plantilla se dispone como sigue:

$a = 3.14$	$\log a =$
$b = 0.413$	$\log b =$
$c = 6.12$; $\log c =$	$\operatorname{colog} c =$
$d = 0.719$; $\log d =$	$\operatorname{colog} d =$
$\boxed{N =}$	$\log N =$

Se colocan ahora los valores en la plantilla:

$a = 3.14$	$\log a = \quad 0.4969$
$b = 0.413$	$\log b = \quad 9.6160 - 10$
$c = 6.12$; $\log c = 0.7868$	$\operatorname{colog} c = \quad 9.2132 - 10$
$d = 0.719$; $\log d = (9.8567 - 10)$	$\operatorname{colog} d = \quad 0.1433$
$N = 0.2947$	$\log N = 19.4694 - 20$

o sea $\boxed{N = \mathbf{0.295},}$ con tres cifras significativas.

Ejemplo 2. Calcule por logaritmos el valor de

$$N = \frac{(27.65)^{1/3}(3.160)}{(0.09876)\,(1.070)^4}.$$

Solución:

$$\log N = \tfrac{1}{3}\log 27.65 + \log 3.160 + \operatorname{colog} 0.9876 + 4\operatorname{colog} 1.070.$$

$a = 27.65$; $\log a = 1.4417$	$\frac{1}{3}\log a = \quad 0.4806$
$b = 3.160$	$\log b = \quad 0.4997$
$c = 0.09876$; $\log c = 8.9946 - 10$	$\operatorname{colog} c = \quad 1.0054$
$d = 1.070$; $\log d = 0.0294$; $\operatorname{colog} d = 9.9706 - 10$	$4\operatorname{colog} d = 39.8824 - 40$
$\boxed{N = 73.80}$	$\log N = 41.8681 - 40$

Ejemplo 3. Las fórmulas que se dan a continuación son de uso frecuente en trigonometría esférica, en la resolución de triángulos rectángulos:

$$\cos c = \cos a \cos b, \quad \cot B = \operatorname{sen} a \cot b, \quad \cot A = \cot a \operatorname{sen} b.$$

Establezca la plantilla para calcularlas por logaritmos.

Solución:

$\log \cos c = \log \cos a + \log \cos b$; $\log \cot B = \log \operatorname{sen} a + \log \cot b$;
$\log \cot A = \log \cot a + \log \operatorname{sen} b$.

$a =$	$\log \cos a =$	$\log \operatorname{sen} a =$	$\log \cot a =$
$b =$	$\log \cos b =$	$\log \cot b =$	$\log \operatorname{sen} b =$
$c =$	$\log \cos c =$	$\log \cot B =$	$\log \cot A =$
$B =$			
$A =$			

EJERCICIOS 8.3

1. Haciendo uso de tablas de logaritmos de cuatro cifras decimales, calcule el valor de cada una de las expresiones siguientes:

a) $N = (808)(0.0539)(2.21)$.

b) $N = \dfrac{7.658}{3.241}$.

c) $N = \dfrac{0.006748}{0.09904}$.

d) $N = (5.671)^{0.25}$.

e) $N = \dfrac{(85.87)(0.3020)}{(12.80)(3.056)}$.

f) $N = \dfrac{(7.892)(2.350)^4}{(4.902)(1.005)^2}$.

g) $N = \dfrac{(36.70)(87.34)}{(2.943)\sqrt{2.615}}$.

h) $N = \dfrac{(212.4)(8.120)(20.08)}{(365.0)(531.2)(2.576)}$.

i) $N = \dfrac{(0.6235)^{2/5}}{(257.1)^{2/3}}$.

j) $N = \sqrt{\dfrac{(36.37)^{1/7}(31.28)^3}{(1.628)^2(0.03270)^{1/4}}}$.

2. Para los problemas siguientes haga uso de una tabla de logaritmos de cinco cifras decimales, si dispone de una.

a) $N = (264.56)(327.02)$.

b) $N = \dfrac{9.8860}{29.004}$.

c) $N = (0.82067)^{0.17}$.

d) $N = \dfrac{(100.28)(62.027)}{(890.63)(1.0570)^3}$.

e) $N = \sqrt{\dfrac{(28.704)^3(32.610)^{1/6}}{(0.16283)^2(0.032479)^{1/4}}}$.

3. Establezca la plantilla logarítmica que se necesita para calcular cada una de las expresiones siguientes:

a) $a = c \operatorname{sen} A$.

b) $b = a \cot A$.

c) $c = b \csc B$.

d) $\tan A = a/b$; $c = a \csc A$.

e) $c = b \csc B$; $a = b \cot B$.

f) $a = c \operatorname{sen} A \csc C$.

8.4. SOLUCION LOGARITMICA DE TRIANGULOS RECTANGULOS

Un método para la resolución de triángulos rectángulos usando logaritmos consiste en trazar, aproximadamente a escala, el triángulo propuesto; encerrar en círculos los datos; si es posible, expresar las partes no conocidas

en términos de productos de los datos; y por último calcular las expresiones anteriores con la ayuda de logaritmos. El método se ilustra con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Resuelva el triángulo rectángulo ACB, en donde $a = 27.92$ y $A = 31°22'$.

Solución: Trace el triángulo (figura 8.4-1) y escriba las fórmulas

$$B = 90° - A,\ c = a \csc A,\ b = a \cot A.$$

Establezca la plantilla* logarítmica y efectúe las operaciones:

$$\log c = \log a + \log \csc A,\ \log b = \log a + \log \cot A.$$

	(c)	(b)
$A = 31°22'$	$\log \csc A = 10.2836 - 10$	$\log \cot A = 10.2149 - 10$
$a = 27.92$	$\log a = 1.4459$	$\log a = 1.4459$
	$\log c = 11.7295 - 10$	$\log b = 11.6608 - 10$

$c = 53.64$
$b = 45.79$
$B = 58°38'$

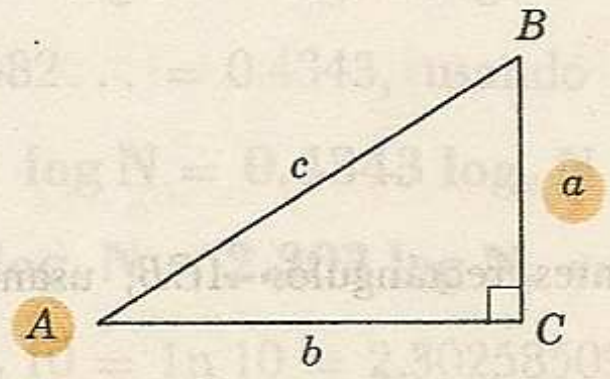


Figura 8.4-1

Nota: Las letras entre paréntesis que aparecen en la parte superior de las columnas de logaritmos, se refieren al elemento del triángulo calculado en esa columna.

Para tablas en las que no aparecen directamente $\log \csc \theta$, y $\log \sec \theta$, sus valores se calculan usando $\operatorname{colog} \operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{colog} \cos \theta$, respectivamente.

* Si en la plantilla se suprimen las letras y el signo de igualdad después de cada símbolo log, entonces cada línea de la plantilla logarítmica corresponde a la primera función que aparezca a su izquierda. Igualmente, por sencillez en la escritura se puede omitir el término $-10'$. Para el ejemplo 1, la fórmula así simplificada es:

$A = 31°22'$	L csc 10.2836	L cot 10.2149
$a = 27.92$	log 1.4459	log 1.4459
	log 11.7295	log 11.6608

$c = 53.64$
$b = 45.79$
$B = 58°38'$

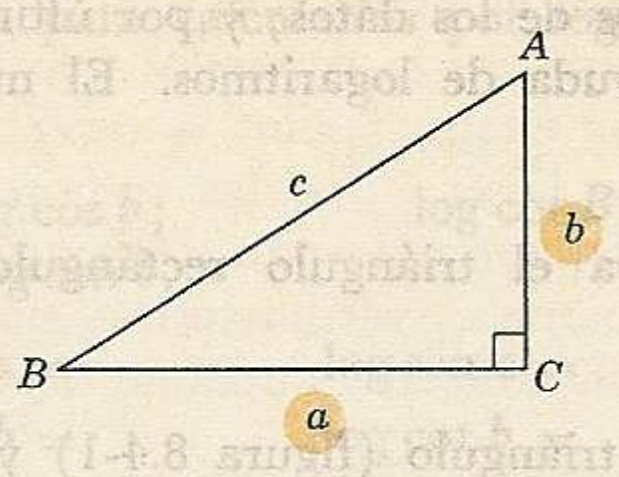


Figura 8.4-2

Ejemplo 2. Resuelva el triángulo ACB, en donde $a = 345.4$, y $b = 216.2$.

Solución: Trace el triángulo (figura 8.4-2) y escriba las fórmulas:

$$\tan B = \frac{b}{a},\ c = b \csc B,\ A = 90° - B.$$

$$\log \tan B = \log b + \operatorname{colog} a;\ \log c = \log b + \log \csc B.$$

$b = 216.2$

$a = 345.4;\ \log a = 2.5383;$

$B = 32°03'$
$c = 407.5$
$A = 57°57'$

(B)

$\log b = 2.3349$

$\operatorname{colog} a = 7.4617 - 10$

$\log \tan B = 9.7966 - 10$

(c)

$\log b = 2.3349$

$\log \csc B = 10.2752 - 10$

$\log c = 12.6101 - 10$

EJERCICIOS 8.4

1. Resuelva los siguientes rectángulos ACB, usando tablas de logaritmos de cuatro cifras decimales.

a)	$a = 69.30$,	$A = 40°30'$.	*b)*	$b = 13.51$,	$B = 26°11'$.
c)	$a = 2.942$,	$B = 72°07'$.	*d)*	$b = 3190$,	$A = 24°50'$.
e)	$a = 9.05$,	$b = 4.34$.	*f)*	$b = 1.731$,	$a = 1.180$.
g)	$A = 62°09'$,	$c = 83.62$.	*h)*	$B = 69°46'$	$c = 38.94$.
i)	$a = 4.458$,	$c = 17.63$.	*j)*	$c = 3.723$,	$b = 2.630$.
k)	$a = 21.30$,	$c = 120.0$.	*l)*	$c = 65.05$,	$a = 57.82$.
m)	$c = 425.0$,	$A = 42°00'$.	*n)*	$a = 40.27$,	$A = 67°19'$.
o)	$b = 647.1$,	$a = 869.4$.			

2. Resuelva los siguientes triángulos rectángulos ACB, usando tablas de logaritmos de cinco cifras decimales, si es posible.

a)	$a = 516.23$,	$b = 414.75$.	*b)*	$A = 25°16.3'$.	$a = 388.26$.
c)	$A = 88°59.2'$,	$b = 8.2349$.	*d)*	$B = 64°00.6'$,	$c = 63.000$.
e)	$c = 300.00$,	$A = 42°10.0'$.			

8.5. CAMBIOS DE BASE, ECUACIONES LOGARITMICAS Y EXPONENCIALES

Ocasionalmente se conoce el logaritmo de un número en una base dada y se desea hallar el logaritmo del mismo número en otra base. El

problema se presentó con los logaritmos vulgares: primeramente se construyó la tabla de logaritmos neperianos (de base $e = 2.718\ldots$) usando métodos que se describen en Cálculo y después se convirtieron a la base 10. Al efecto, se usa el

***Teorema* 8.5-1:** $\log_a N = \log_b N \log_a b$.

Demostración: Sea $x = \log_b N$; entonces $N = b^x$. Tomando ahora logaritmos de base a se obtiene

$$\log_a N = \log_a b^x = x \log_a b.$$

ó

$$\boldsymbol{\log_a N = \log_b N \log_a b.}$$

Ejemplo 1. Halle la relación entre los logaritmos vulgares y los neperianos.

Solución: Sea $x = \log_e N$ (logaritmo natural); entonces

$$e^x = N$$

Usando logaritmos vulgares

$$\log e^x = \log N$$

ó

$$x \log e = \log N$$

del cual se tiene

$$\log N = \log_e N \log e.$$

Como $\log e = 0.434294482\ldots = 0.4343$, usando la tabla III resulta

$$\mathbf{\log N = 0.4343 \log_e N}$$

ó $\mathbf{\log_e N = 2.303 \log N,}$ ya que

$$\frac{1}{\log e} = \mathbf{\log_e} 10 = \text{1n } 10 = 2.302585093\ldots = 2.303.$$

Ejemplo 2. Halle $\log_3 8$.

Solución: Use el teorema 8.5-1 en la forma

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Como $b = 3$, $a = 10$ y $N = 8$:

$$\mathbf{\log_3 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} = \frac{0.9031}{0.4771} = 1.893.}$$

Toda ecuación de la forma $a^x = b$, donde el exponente es desconocido, se llama *ecuación exponencial* y puede resolverse por logaritmos, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3. Resuelva la ecuación $3^x = 12$.

Solución: Use logaritmos vulgares:

$$\log 3^x = \log 12$$

ó $$x \log 3 = \log 12$$

$$\therefore \quad x = \frac{\log 12}{\log 3},$$

que representa el *cociente de dos logaritmos* y *no* el logaritmo de un cociente. Use la tabla III; se obtiene

$$x = \frac{1.0792}{0.4771} = \mathbf{2.262.}$$

Ejemplo 4. Resuelva la ecuación $3^{x-1} = 2^{x+1}$.

Solución: Use logaritmos vulgares:

$$(x - 1) \log 3 = (x + 1) \log 2.$$

$$x \log 3 - \log 3 = x \log 2 + \log 2,$$

$$x (\log 3 - \log 2) = \log 3 + \log 2,$$

$$x = \frac{\log 3 + \log 2}{\log 3 - \log 2} = \frac{\log 6}{\log 1.5} = \frac{0.7781}{0.1761},$$

$$x = \mathbf{4.419.}$$

Toda ecuación que contiene el logaritmo de la incógnita o de una función de ella, se llama *ecuación logarítmica.*

Ejemplo 5. Resuelva la ecuación

$$\log x + \log (2x + 1) = 0.$$

Solución:

$$\log x + \log (2x + 1) = \log x(2 + 1).$$

Entonces

$$\log (2x^2 + x) = 0$$

$$\therefore \quad 2x^2 + x = 1$$

$$2x^2 + x - 1 = \text{J}$$

y

$$(2x - 1)(x + 1) = 0,$$

$$x = \tfrac{1}{2} \text{ ó } x = -1.$$

Sustituyendo ambas soluciones en la ecuación original, se ve que la única raíz útil es $x = \mathbf{1/2}$, ya que no existen logaritmos de números negativos.

EJERCICIOS 8.5

1. Halle el logaritmo natural de los siguientes números:

a) 2. *b)* 3. *c)* 12. *d)* 42.2.
e) 0.278. *f)* 0.409. *g)* 25.6. *h)* 111.3.

2. Halle el valor de:

a) $\log_2 8$. *b)* $\log_2 9$. *c)* $\log_5 32$. *d)* $\log_3 16$.
e) $\log_{1.2} 25$. *f)* $\log_5 0.27$. *g)* $\log_3 0.46$. *h)* $\log_2 (25.3)^2$.

3. Muestre que $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2x = 9$. *b)* $3^x = 25$. *c)* $2^{x+1} = 3^{x-1}$.
d) $e^{3x} = 27$. *e)* $1.5^{x-1} = 15^{2x}$. *f)* $10^{x3} = 8$.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a) $\log 3x + \log (2x - 1) = 0$. *b)* $\log x + \log 3x = 6$.
c) $\log x = \log x^2 = 1$. *d)* $3 \log x = \log 1000x$.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 8

1. Defina el logaritmo de N.

2. Establezca las tres reglas básicas para operar con logaritmos.

3. Muestre que $\log(MN) = \log M + \log N$.

4. *a)* Cuando se usan las expresiones "característica" y "mantisa", diga qué sistema de logaritmos se está empleando.

b) Defina "característica".

c) Defina "mantisa".

d) Defina "cologaritmo".

5. Halle el valor de

a) $\log 67.32$. *b)* $\log \cos 42°20'$.
c) N, si $\log N = 3.6271$. *d)* θ, si $\log \operatorname{sen} \theta = 9.2346 - 10$.

6. Halle x por logaritmos, si

$$x = \frac{(26.2) \tan 36°}{(8.26)^3}.$$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt[3]{8^{x-1}} = 64$; *b)* $x = \log_5 3$.

CAPITULO 9

Triángulos oblicuángulos

9.1. INTRODUCCION

Cuando se conocen tres elementos de un triángulo (uno de ellos necesariamente un lado), es posible, mediante la ayuda de ciertas fórmulas, determinar los otros tres elementos. Dos de las fórmulas más usuales, entre las varias que existen, son las llamadas *ley de los senos* y *ley de los cosenos*.

En la resolución de triángulos oblicuángulos, se pueden distinguir cuatro casos:

CASO 1: Cuando se conocen dos ángulos y un lado.
CASO 2: Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
CASO 3: Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido.
CASO 4: Cuando se conocen los tres lados.

En todo triángulo ABC, los ángulos se representarán por A, B y C, y sus lados opuestos por las minúsculas correspondientes.

En el presente capítulo la mayor parte de los problemas se resolverán con la ayuda de la tabla de logaritmos de cuatro decimales. En caso de emplearse la regla de cálculo, los datos se redondearán a tres cifras significativas.

9.2. LEY DE LOS SENOS

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos. O sea, en cualquier triángulo ABC,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Demostración: En el plano del triángulo trace un sistema de coordenadas de modo que uno de los ángulos, por ejemplo A, quede en posición normal. En la figura 9.2-1(a), se muestra el caso de ser A un ángulo agudo, y en la figura 9.2-1(b), el caso de ser A un ángulo obtuso. En cualquiera de las dos figuras las coordenadas del punto C son $(b \cos A,$

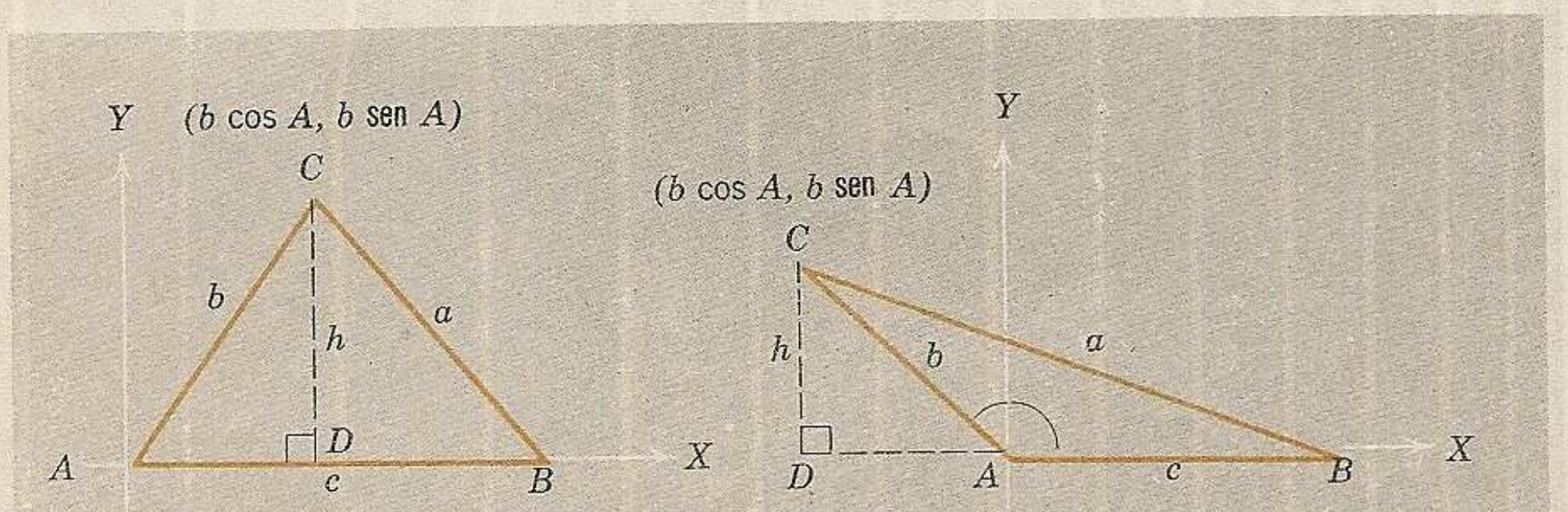


Figura 9.2-1

b sen A). La altura h del triángulo, es igual a la ordenada del punto C, o sea

$$h = b \operatorname{sen} A.$$

En el triángulo rectángulo BDC,

$$h = a \operatorname{sen} B;$$

entonces,

$$b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B,$$

de donde

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}.$$

Si ahora coloca el ángulo B en posición normal, se obtiene

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Las dos igualdades anteriores se escriben en forma más compacta como

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\operatorname{\mathbf{sen}} \boldsymbol{A}} = \frac{\boldsymbol{b}}{\operatorname{\mathbf{sen}} \boldsymbol{B}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\operatorname{\mathbf{sen}} \boldsymbol{C}}. \tag{9.2-1}$$

Así, la ley de los senos queda expresada por una proporción sumamente sencilla, que se usa cuando los datos incluyen uno de los lados y su ángulo opuesto (casos 1 y 2). Dado que el seno de un ángulo es positivo en el primero y en el segundo cuadrante, la ley de los senos no sirve cuando no se conoce el cuadrante del ángulo. En ciertas ocasiones se puede hacer la selección acertada recordando que al mayor lado se opone el mayor ángulo. Otras ocasiones se pueden hallar dos valores posibles del ángulo; cosa que se discutirá en el caso 2, llamado *caso ambiguo,* porque puede tener dos soluciones, una, o ninguna.

EJERCICIOS 9.2

1. Usando la ley de los senos calcule el elemento que se pide:

a) $A = 60°$, $B = 45°$, $a = 4$, encuentre b.

b) $A = 120°$, $C = 30°$, $c = 10$, encuentre a.

c) $B = 30°$, $C = 135°$, $b = 3\sqrt{2}$, encuentre c.

d) $A = 120°$, $a = 2\sqrt{3}$, $b = 1$, encuentre B.

e) $B = 30°$, $b = 8$, $a = 8\sqrt{2}$, encuentre A (dos respuestas).

2. Muestre que en todo triángulo ABC, el área S está dada por $S = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$. (*Sugerencia*: trace la altura desde el vértice C y use la fórmula: área de un triángulo $= \frac{1}{2}$ base $\times$ altura).

3. Use la ley de los senos y demuestre que el área de un triángulo, $S = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$, se puede expresar por la fórmula

$$S = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B}.$$

4. Usando la ley de los senos deduzca la expresión

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} B}.$$

(*Sugerencia*: Escriba la ley de los senos en la forma $\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$ y sume 1 a ambos miembros).

5. Usando la ley de los senos deduzca la expresión

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} B}.$$

6. Use los resultados de los problemas 4 y 5, y las fórmulas 7.6-5 y 7.6-6 para demostrar que

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}.$$

7. Muestre que la relación

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}C}$$

es válida para todo triángulo ABC.

8. Use la ley de los senos para establecer la fórmula de Mollweide:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{a+b}{c}.$$

Note que esta fórmula sirve para comprobar la solución de un triángulo, ya que relaciona las 6 partes del mismo.

9.3. APLICACIONES DE LA LEY DE LOS SENOS

Los casos 1 y 2 se pueden resolver con la ley de los senos, como se muestra en los ejemplos siguientes.

CASO 1. SOLUCIÓN LOGARÍTMICA

Ejemplo 1. Resuelva el triángulo ABC si $A = 104°14'$, $C = 27°09'$ y $c = 185.7$.

Solución: Trace el triángulo como se muestra en la figura 9.3-1.

De $$B = 180° - (A + C),$$

Se tiene $$\boldsymbol{B = 48°37'.}$$

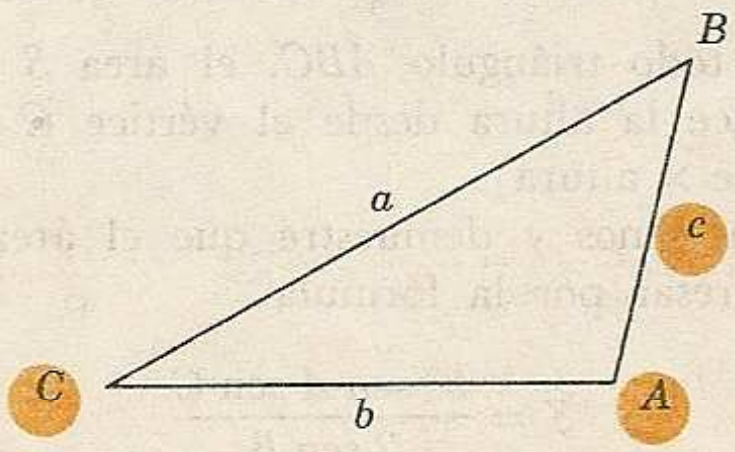


Figura 9.3-1

De la ley de los senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \text{ y } \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C},$$

$$\boldsymbol{a = c \operatorname{sen} A \csc A \text{ y } B = c \operatorname{sen} B \csc C.}$$

Establezca la plantilla para operaciones con logaritmos:

$\log a = \log c + \log \operatorname{sen} A + \log \csc C$; $\log b = \log c + \log \operatorname{sen} B + \log \csc C$.

	(a)	(b)
$c = 185.7$	$\log c = 2.2688$	$\log c = 2.2688$
$A = 104°14'$;	$\log \operatorname{sen} A = 9.9865 - 10$	
$C = 27°09'$;	$\log \csc C = 10.3408 - 10$	$\log \csc C = 10.3408 - 10$
$B = 48°37'$		$\log \operatorname{sen} B = 9.8753 - 10$
$\boldsymbol{a = 394.5}$	$\log a = 22.5961 - 20$	
$\boldsymbol{b = 305.4}$		$\log b = 22.4849 - 20$
$\boldsymbol{B = 48°37'}$		

CASO 1. RESOLUCIÓN CON REGLA DE CÁLCULO. Para la resolución con regla de cálculo, conviene escribir la ley de los senos como sigue

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

Ejemplo 2. Resuelva el triángulo ABC si $a = 47.5$, $B = 75°$, y $C = 45°$.

Solución: Determine el ángulo A de

$$A = 180° - (75° + 45°),$$

$$\boldsymbol{A = 60°.}$$

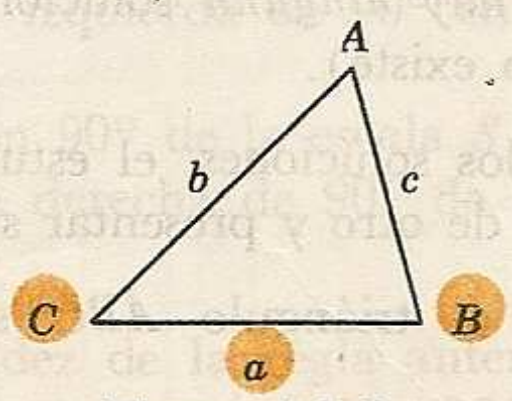


Figura 9.3-2

Como se conoce un ángulo y el lado opuesto (figura 9.3-2), aplique la ley de los senos

$$\frac{\boldsymbol{\operatorname{sen} 60°}}{\boldsymbol{47.5}} = \frac{\boldsymbol{\operatorname{sen} 75°}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{\operatorname{sen} 45°}}{\boldsymbol{c}}.$$

La regla de cálculo se dispone como se muestra en la figura 9.3-3:

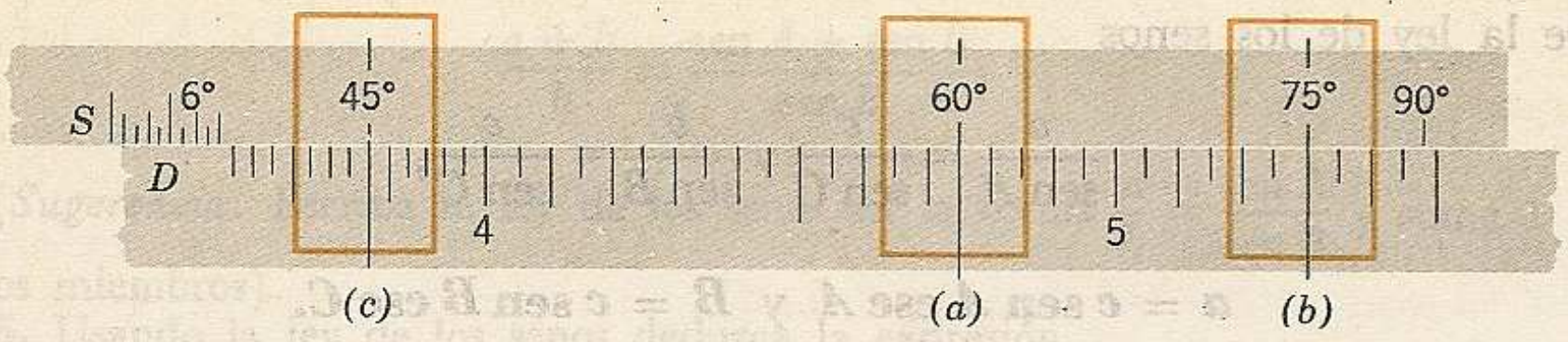


Figura 9.3-3

Coloque **60°** en la escala *S* coincidiendo con **47.5** de la escala *D*; ahora, en línea con **75°** de la escala *S*, lea $b = 53.0$ en la escala D; y con **45°** en la escala S, $c = 38.8$, en la escala *D*.

En consecuencia, la solución del triángulo es

$$A = 60°,\ b = 53.0,\ c = 38.8$$

CASO 2. SOLUCIÓN LOGARÍTMICA. Este caso recibe el nombre de ambiguo en virtud de que pueden haber dos soluciones, una, o ninguna. El triángulo para el que puede haber dos soluciones, es aquel en el que el *ángulo dado es agudo*, y su *lado opuesto es el menor* de los dos lados conocidos.

El número de soluciones se determina con facilidad durante el proceso de la resolución del triángulo. Como el seno de un ángulo nunca es mayor que 1, su logaritmo no puede ser mayor que cero. Considere el triángulo *ABC* en el cual se conocen *a*, *b* y *B*, $b < a$. Por la ley de los senos,

$$\operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} B}{b}.$$

Tome ahora logaritmos; si

i) $\log \operatorname{sen} A < 0$; habrá *dos* soluciones.
(sen *A* es positivo en los dos primeros cuadrantes, por lo que la igualdad se satisfará para *dos* valores de *A*).

ii) $\log \operatorname{sen} A = 0$; habrá *una* solución.
($\operatorname{sen} A = 1$; por lo tanto $A = 90°$ y el triángulo será rectángulo).

iii) $\log \operatorname{sen} A > 0$; no hay *ninguna* solución.
($\operatorname{sen} A > 1$, no existe).

En el caso de haber dos soluciones, el estudiante debe distinguir cuidadosamente un triángulo de otro y presentar sus soluciones por separado.

Ejemplo 3. Resuelva el triángulo *ABC* si $b = 15.42$, $a = 21.76$ y $B = 28°15'$.

Solución: como $B < 90°$ y $b < a$, habrá dos soluciones, como se ve en la figura 9.3-4.

De la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b},$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} B}{b}.$$

$$C = 180° - (A + B).$$

De

$$\frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{\operatorname{sen} B}{b},$$

Tenemos

$$c = b \operatorname{sen} C \csc B.$$

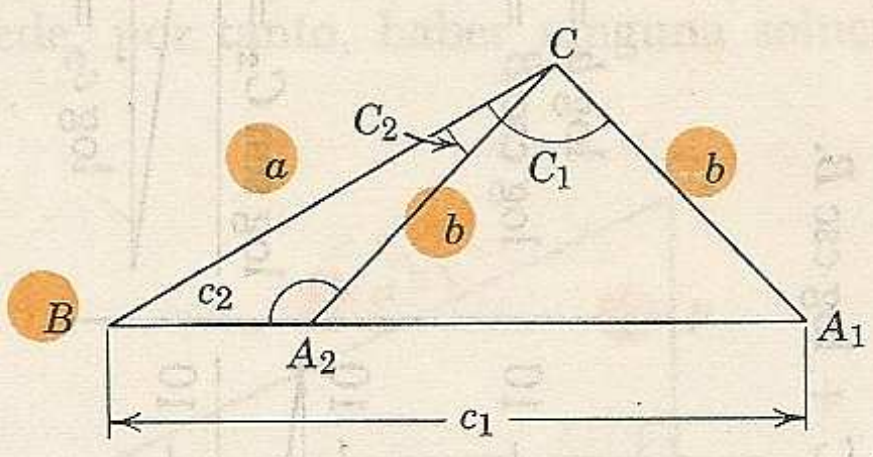


Figura 9.3-4

La resolución logarítmica se muestra en la plantilla de la página siguiente, en la que se halló primeramente log sen A para determinar el número de soluciones; como log sen A resultó < 0, sabemos que existen dos resoluciones.

CASO 2. RESOLUCIÓN CON REGLA DE CÁLCULO. La siguiente regla sirve para saber el número de soluciones en el caso ambiguo, mediante el uso de la regla de cálculo.

Regla: Sea A el ángulo agudo y a su lado opuesto, siendo a menor que el otro lado conocido b. Para determinar el número de soluciones se procede como sigue:

1. Forme la razón sen A/a. (A en la escala S con a en la escala D).
2. Mueva el cursor hasta encontrar b en la escala D.
3. Entonces,

i) si b queda a la izquierda de 90° en la escala S, se tienen **dos** soluciones.
ii) si b coincide con 90° de la escala S, habrá **una** solución.
iii) si b queda a la derecha de 90° de la escala S, no habrá **ninguna** solución.

Para demostrar la validez de la regla anterior, considere el triángulo ABC, donde A, a y b son datos, con $A < 90°$ y $a < b$, y la ley de los senos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b}.$$

Sea b_1 el valor de b cuando b coincide con la marca 90° de la escala S; la ley de los senos da:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} 90°}{b_1},$$

Resolución logarítmica del ejemplo 9.3-3.

$$\log \operatorname{sen} A = \log a + \log \operatorname{sen} B + \operatorname{colog} b;\ \log c = \log b + \log \operatorname{sen} C + \log \csc B.$$

$a = 21.76$
$b = 15.42$
$B = 28°15'$

$A_1 = 41°55'$	$A_2 = 138°05'$
$C_1 = 109°50'$	
	$C_2 = 13°40'$
$c_1 = 30.64$	

$c_2 = 7.697$

(A)

$\log a = 1.3377$
$\operatorname{colog} b = 8.8119 - 10$
$\log \operatorname{sen} B = 9.6752 - 10$

$\log \operatorname{sen} A = 19.8248 - 20$

(c_1)

$\log b = 1.1881$
$\log \csc B = 10.3248 - 10$

$\log \operatorname{sen} C_1 = 9.9734 - 10$

$\log c_1 = 21.4863 - 10$

(c_2)

$\log b = 1.1881$
$\log \csc B = 10.3248 - 10$

$\log \operatorname{sen} C_2 = 9.3734 - 10$

$\log c_2 = 20.8863 - 20$

y $$a = b_1 \operatorname{sen} A = p.$$

Se tiene así el triángulo rectángulo de la figura 9.3-5(*a*) y sólo existe, en consecuencia, una solución.

Para los mismos valores de A y a, pero para $b > b_1$ (b a la derecha de la marca 90°), se tiene el triángulo con su vértice C en C_2, como se muestra en la figura 9.3-5(*b*); obviamente, el lado a no puede cortar al lado AB, y no puede, por tanto, haber ninguna solución.

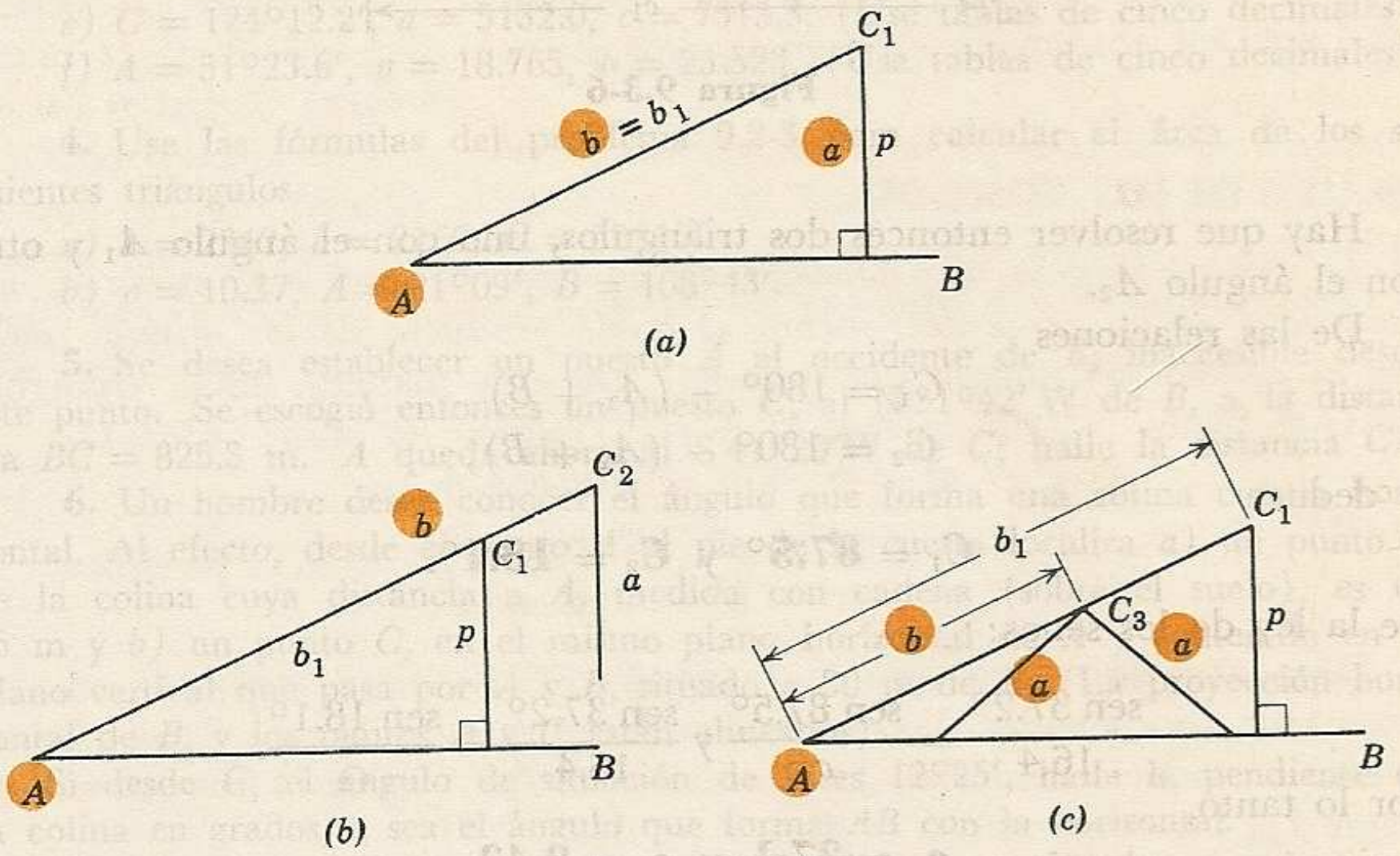


Figura 9.3-5

Para los mismos valores de A y a, pero para $b < b_1$ (b a la izquierda de la marca 90°) se tiene el triángulo con su vértice C en C_3 (figura 9.3-5(*c*)). En dicho triángulo el lado a puede cortar al lado AB en dos puntos y se tendrán por tanto, dos soluciones.

Ejemplo 4. Resuelva el triángulo ABC, si $B = 37.2°$, $b = 16.4$ y $a = 22.3$.

Solución: Como $B < 90°$ y $b < a$, se esperan dos soluciones; la ley de los senos da, en la regla de cálculo:

$$\frac{\operatorname{sen} 37.2°}{16.4} = \frac{\operatorname{sen} A}{22.3}.$$

Como 22.3 queda a la *izquierda* de 90° en la escala S, se concluye que habrán *dos soluciones*; trace el triángulo como se muestra en la figura 9.3-6.

Dado que sen A es positivo en los dos primeros cuadrantes, los dos valores posibles de A son

$$\boldsymbol{A_1 = 55.3°} \text{ y } \boldsymbol{A_2 = 124.7°}.$$

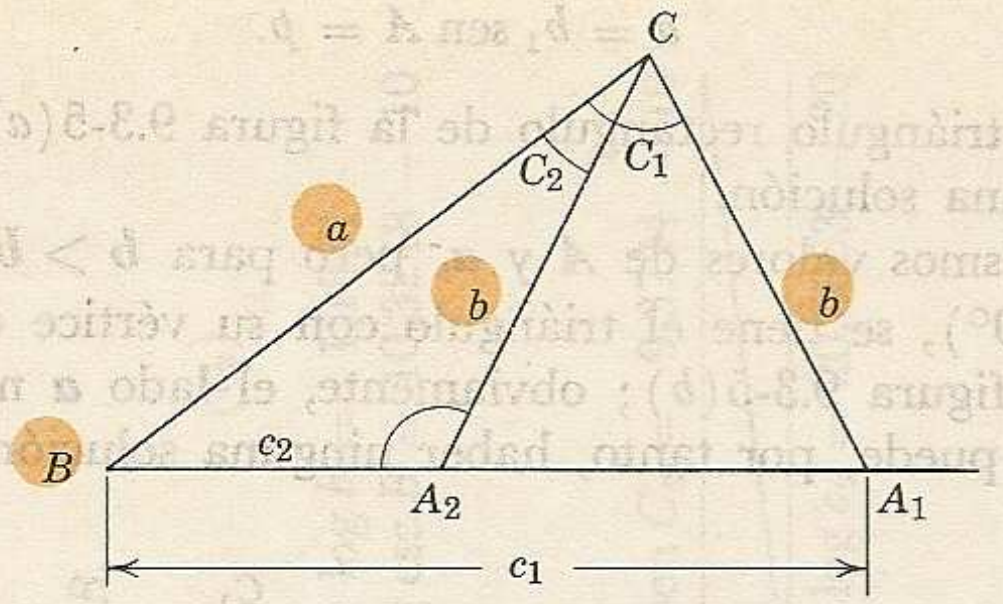


Figura 9.3-6

Hay que resolver entonces dos triángulos, uno con el ángulo A_1 y otro con el ángulo A_2.

De las relaciones

$$C_1 = 180° - (A_1 + B)$$

y

$$C_2 = 180° - (A_2 + B),$$

se deduce

$$\boldsymbol{C_1 = 87.5°} \text{ y } \boldsymbol{C_2 = 18.1°}.$$

De la ley de los senos:

$$\frac{\text{sen } 37.2°}{16.4} = \frac{\text{sen } 87.5°}{c_1} \text{ y } \frac{\text{sen } 37.2°}{16.4} = \frac{\text{sen } 18.1°}{c_2}.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{c_1 = 27.1} \text{ y } \boldsymbol{c_2 = 8.43}.$$

En consecuencia, las soluciones son

$$\boldsymbol{A_1 = 55.3°,\ C_1 = 87.5°,\ c_1 = 27.1},$$
$$\boldsymbol{A_2 = 124.7°,\ C_2 = 18.1°,\ c_2 = 8.43}.$$

EJERCICIOS 9.3

1. Resuelva los siguientes triángulos, si:

a) $a = 4.22,\ A = 72°20',\ B = 45°30'$.

b) $b = 121.2,\ A = 26°23',\ C = 44°12'$.

c) $b = 0.5339,\ A = 41°20',\ B = 120°12'$.

d) $C = 26°40',\ B = 37°20',\ a = 468.3$.

e) $A = 69°59.2',\ B = 21°25.3',\ c = 12.568$. (Use tablas de cinco decimales).

f) $B = 38°38.4',\ C = 97°21.6',\ a = 117.05$. (Use tablas de cinco decimales).

2. Dibuje los triángulos ABC cuyos datos se dan a continuación y determine el número de soluciones para cada uno de ellos; designe por p la altura relativa al vértice C.

a) $A < 90°,\ a < b$, y $a < p$.

b) $A < 90°,\ a < b$, y $a = p$.

c) $A < 90°$, $a < b$, y $a > p$.
d) $A < 90°$, $a > b$.
e) $A > 90°$, $a > b$.
f) $A > 90°$, $a < b$.

3. Resuelva los siguientes triángulos, si

a) $a = 4.247$, $b = 7.680$, $A = 20°40'$.
b) $c = 43.20$, $b = 32.91$, $C = 48°18'$.
c) $b = 16.39$, $c = 20.11$, $B = 118°48'$.
d) $b = 315.0$, $c = 573.1$, $B = 57°12'$.
e) $C = 124°12.2'$, $a = 5132.0$, $c = 7513.3$. (Use tablas de cinco decimales).
f) $A = 51°23.6'$, $a = 18.765$, $b = 23.523$. (Use tablas de cinco decimales).

4. Use las fórmulas del problema 9.2-3 para calcular el área de los siguientes triángulos.

a) $a = 2342$, $b = 2160$, $C = 52°17'$.
b) $c = 10.37$, $A = 21°09'$, $B = 108°43'$.

5. Se desea establecer un puesto A al occidente de B, inaccesible desde este punto. Se escogió entonces un puesto C, al N 31°42′ W de B, a la distancia $BC = 825.3$ m. A queda ahora al S 41°20′W de C; halle la distancia CA.

6. Un hombre desea conocer el ángulo que forma una colina con la horizontal. Al efecto, desde el punto A al pie de la cuesta localiza *a)* un punto B de la colina cuya distancia a A, medida con cadena (sobre el suelo), es de 75 m y *b)* un punto C, en el mismo plano horizontal de A y contenido en el plano vertical que pasa por A y B, situado a 30 m de A. (La proyección horizontal de B, y los puntos A y C están alineados).

Si desde C, el ángulo de situación de B es 12°25′, halle la pendiente de la colina en grados, o sea el ángulo que forma AB con la horizontal.

7. Dos observadores, distantes entre sí 3600 m y situados en el mismo plano horizontal, ven al mismo tiempo un aeroplano que vuela entre ellos, de modo que su proyección horizontal está en la línea de ambos. Los ángulos de situación reportados por los observadores fueron 36°22′ y 45°12′ respectivamente. Halle la altura del aeroplano respecto al plano horizontal.

8. Un viejo mapa señala un tesoro enterrado en el punto C, que está al N 70°18′ W de cierto árbol T. Para evitar una barranca entre T y C, el mapa dice que hay que caminar 315.3 m hacia el N 10°24′ W y después 260 m hacia el lugar del tesoro. Si el descubridor del mapa ha estudiado trigonometría, ¿iría a buscar el tesoro? ¿Por qué?

9. El piloto de un barco que sigue un derrotero de 290°, ve en un instante dado que está alineado con 2 faros, que están al N 8°20′ E respecto a él; ambos faros distan entre sí 1.8 Km. Diez minutos después, ve que sus visuales a los faros forman entre sí un ángulo de 15°10′ y que el faro que está más hacia el Norte, tiene un azimuth de 50°, o sea que está hacia el N 50° E. Halle la velocidad del barco.

10. La base de una torre de microondas, tiene un ángulo de elevación de 24°19′ respecto a un observador situado a 200 m cuesta abajo de la base. Dicho observador también ve que una sección de la torre necesita reparación. Si los ángulos de situación de los extremos de la sección son 48°37′ y 63°21′, calcule la longitud de la sección por reparar.

11. En el triángulo ABC de la figura 9.3-7, CD es bisectriz del ángulo C. Muestre que

$$x = c \operatorname{sen} B \csc C \operatorname{sen} A \csc (A + \tfrac{1}{2}C).$$

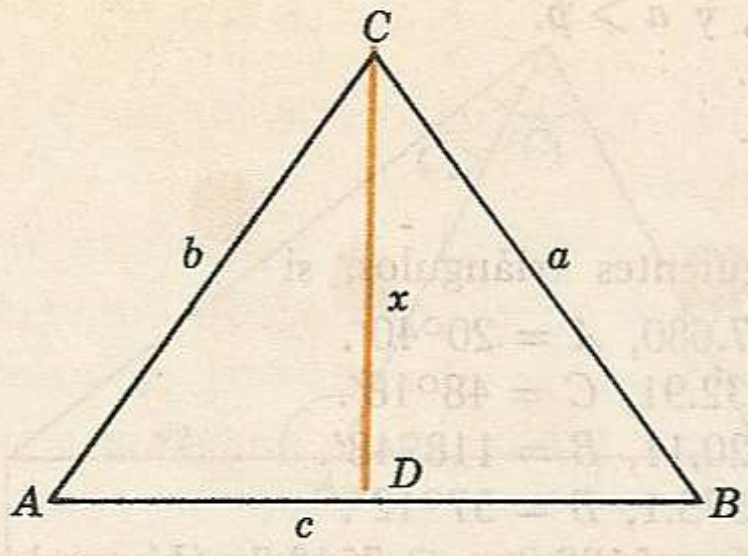


Figura 9.3-7

9.4. LEY DE LOS COSENOS

En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de los mismos lados por el coseno del ángulo que forman. De esta manera, en el triángulo *ABC*, se tiene

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned} \tag{9.4-1}$$

Demostración: Sea *ABC* un triángulo cualquiera, colocado en un sistema de coordenadas *X*, *Y*, como se muestra en la figura 9.4-1. Como *A* está en posición normal, las coordenadas del vértice *C* son $(b \cos A, b \operatorname{sen} A)$; las coordenadas de *B* son $(c, 0)$.

La fórmula del cuadrado de la distancia entre dos puntos, da

$$a^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A - 0)^2;$$

elevando al cuadrado y simplificando:

$$a^2 = b^2 (\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) + c^2 - 2bc \cos A.$$

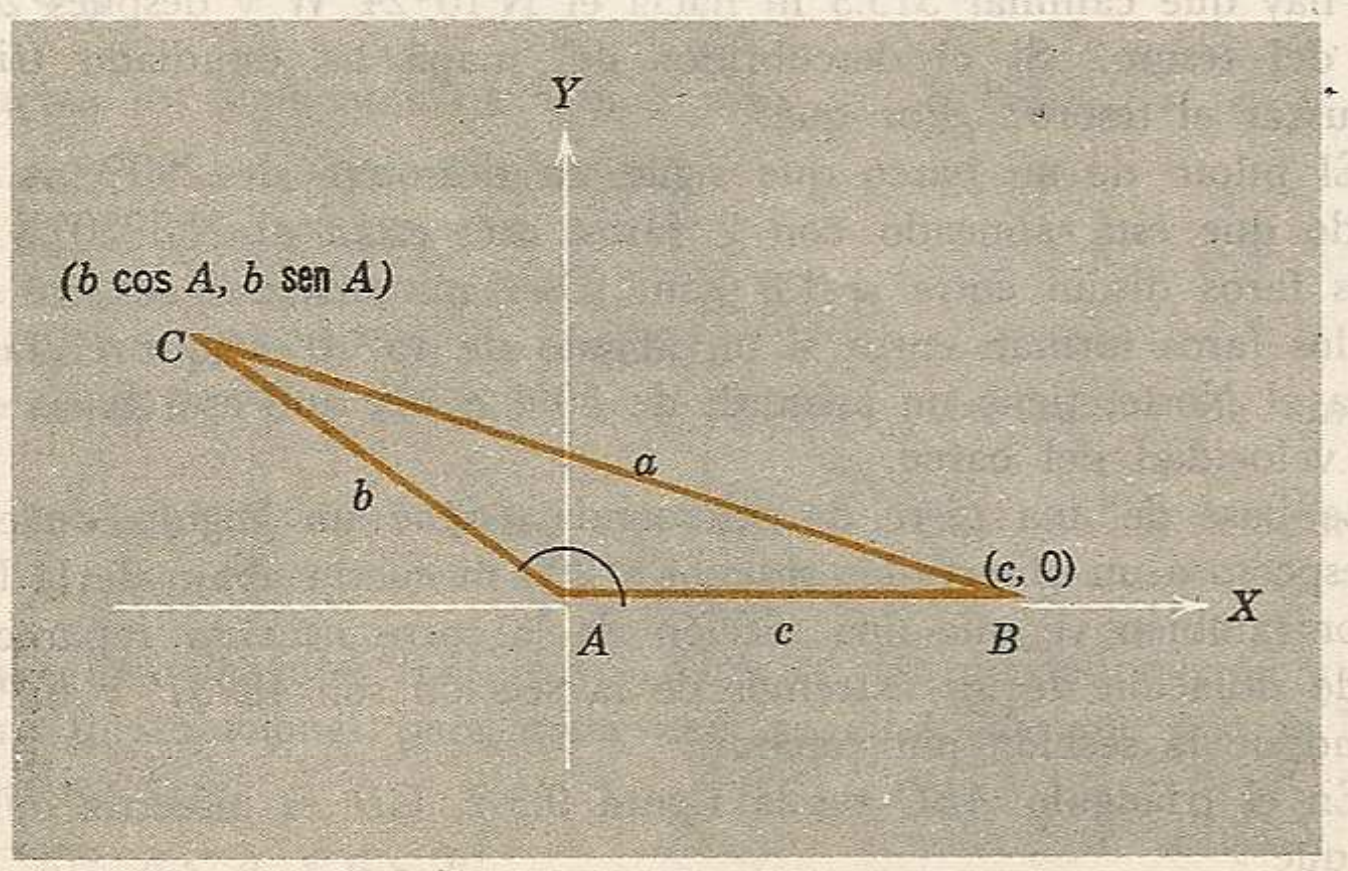


Figura 9.4-1

Pero

$$\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A \equiv 1,$$

por lo que

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.}$$

Puesto que la nomenclatura de los lados del triángulo se eligió arbitrariamente, se concluye que la demostración es igualmente válida para las otras dos fórmulas del grupo 9.4-1.

La ley de los cosenos es útil para hallar el tercer lado de un triángulo cuando se conocen los otros dos y el ángulo comprendido entre ellos (caso 3), o para determinar un ángulo cuando se conocen los tres lados de un triángulo (caso 4).

Una ventaja de la ley de los cosenos, en relación a la ley de los senos, es que permite conocer el cuadrante del ángulo en función del signo del coseno del ángulo. Es decir, si $\cos A$ es positivo, entonces A queda en el *primer cuadrante*; si $\cos A$ es *negativo,* entonces A queda en el *segundo cuadrante*.

Ejemplo. Halle el ángulo C en el triángulo ABC, si $a = 2$, $b = 3$ y $c = 4$.

Solución: De la fórmula $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

y sustituyendo:

$$\cos C = \frac{(2)^2 + (3)^2 - (4)^2}{2(2)(3)},$$

$$\cos C = \frac{4 + 9 - 16}{12},$$

$$\cos C = -\frac{3}{12} = -0.25.$$

Como $\cos C$ es negativo, C está en el segundo cuadrante. En las tablas de funciones naturales se encuentra, aproximando al grado más próximo.

$$C_r = 76^\circ \ (C_r \text{ significa el ángulo reducido de C}).$$

por lo tanto,

$$\boldsymbol{C = 104^\circ.}$$

EJERCICIOS 9.4

Utilizando la ley de los cosenos, calcule el elemento del triángulo ABC que se pide

1. $a = 3$, $b = 4$, $C = 60^\circ$, encuentre c.
2. $a = 3$, $b = 5$, $c = 6$, encuentre C.
3. $b = 5$, $c = 7$, $A = 90^\circ$, encuentre a.
4. $a = 5$, $c = 13$, $B = 120^\circ$, encuentre b.
5. Obtenga una fórmula para calcular el área de un triángulo ABC, si se conocen los lados b y c y el ángulo A.

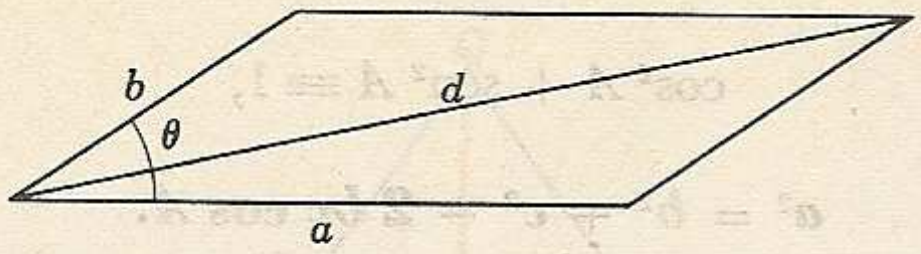


Figura 9.4-2

6. Demuestre que la longitud de la diagonal d del paralelogramo de la figura 9.4-2, está dada por

$$d^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta.$$

7. Muestre que en todo triángulo ABC

$$c^2 = (a - b)^2 + 4ab \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}C.$$

(*Sugerencia:* Use la ley de los cosenos y la fórmula 7.4-3).

8. Muestre que en el triángulo ABC

$$\frac{c^2 + b^2 + a^2}{2abc} = \frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}.$$

9. Muestre que

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{2bc}.$$

(*Sugerencia:* Use la ley de los cosenos y la fórmula 7.4-3, y factorice).

10. Muestre que

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{2bc}.$$

(*Sugerencia*: Use la ley de los cosenos y la fórmula 7.4-4, y factorice).

11. Utilizando los resultados de los problemas 9 y 10, muestre que

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1}{(s - a)} \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}},$$

en donde

$$s = \tfrac{1}{2}(a + b + c).$$

9.5. APLICACIONES DE LA LEY DE LOS COSENOS

En los ejemplos que siguen se muestra la resolución de triángulos correspondientes a los casos 3 y 4, aplicando la ley de los cosenos.

CASO 3. SOLUCIÓN LOGARÍTMICA. En el ejemplo que sigue se muestra un método para usar logaritmos con la ley de los cosenos; sin embargo, el profesor podría preferir que el alumno use la ley de las tangentes, la cual se da en el apéndice A2 de este libro.

Ejemplo. Resuelva el triángulo ABC, si $a = 42.30$, $c = 76.40$, y $B = 32°17'$.

Solución: El triángulo pertenece al caso 3 (figura 9.5-1).

De acuerdo con la ley de los cosenos, se pueden escribir las 3 ecuaciones siguientes:

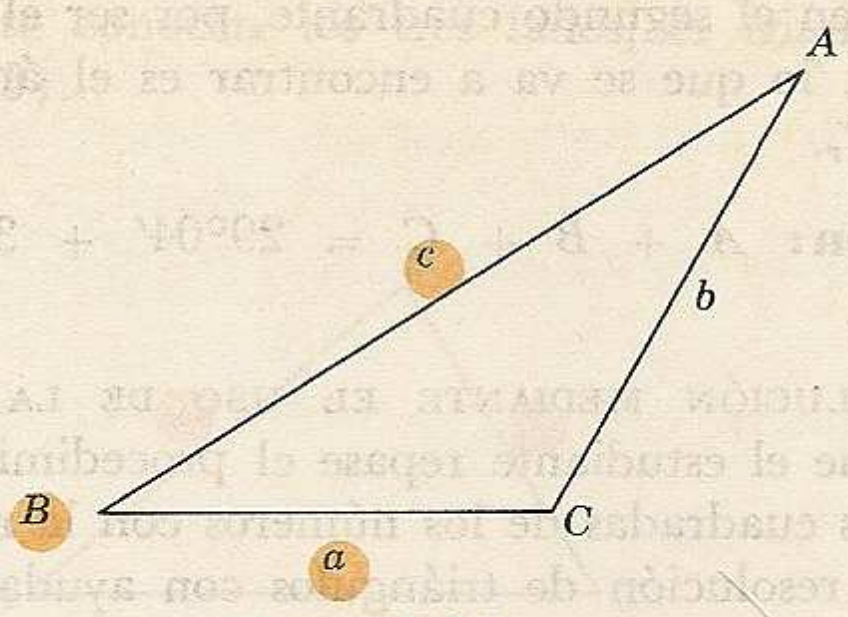


Figura 9.5-1

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{ y}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Para calcular b use la plantilla siguiente

	$(p = 2\,ac \cos B)$		(b^2)
$a = 42.30$	$\log a = 1.6263$	$2 \log a = 3.2526$	$a^2 = 1789$
$c = 76.40$	$\log c = 1.8831$	$2 \log c = 3.7662$	$c^2 = 5837$
2	$\log 2 = 0.3010$		$a^2 + c^2 = 7626$
$B = 32°17'$	$\log \cos B = 9.9270 - 10$		
$p = 2\,ac \cos B$	$\log p = 13.7374 - 10$	$\rightarrow$	$2\,ac \cos B = 5462\ (-)$
$\boxed{b = 46.51}$	$\log b = 1.6676$	$2 \log b = 3.3353$	$\leftarrow \quad b^2 = 2164$

Nota 1. En la plantilla logarítmica anterior, los cuadrados de los lados aparecen en la columna de la derecha. Para hacer hincapié en que tales números son distintos de los que aparecen en la columna que está a la izquierda de cada línea, se ha trazado una raya vertical doble; b^2 se determina por sustracción en la última columna, y b se obtiene después partiendo de la columna de la derecha hacia la de la izquierda.

Para calcular A y C se utilizan separadamente las plantillas siguientes

	(A)
$q = b^2 + c^2 - a^2 = 6212$	$\log q = 3.7932$
2	$\operatorname{colog} 2 = 9.6990 - 10$
$b = 46.51$	$\operatorname{colog} b = 8.3324 - 10$
$c = 76.40$	$\operatorname{colog} c = 8.1169 - 10$
$\boxed{A = 29°04'}$	$\log \cos A = 29.9415 - 30$

	(C)
$r = a^2 + b^2 - c^2 = -1884$	$\log r = (-)\ 3.2751$
2	$\operatorname{colog} 2 = 9.6990 - 10$
$b = 46.51$	$\operatorname{colog} b = 8.3324 - 10$
$a = 42.30$	$\operatorname{colog} a = 8.3737 - 10$
$\boxed{C = 118°37'}$	$\log \cos C_r = 29.6802 - 30$

o sea que C está en el segundo cuadrante, por ser el numerador negativo; consecuentemente, lo que se va a encontrar es el ángulo reducido al CI, o sea el ángulo C_r.

Comprobación: $A + B + C = 29°04' + 32°17' + 118°37' = 179°58'$.

CASO 3. RESOLUCIÓN MEDIANTE EL USO DE LA REGLA DE CÁLCULO. Es conveniente que el estudiante repase el procedimiento para determinar cuadrados y raíces cuadradas de los números con la regla de cálculo, antes de proceder a la resolución de triángulos con ayuda de dicha regla y de la ley de los cosenos.

Ejemplo. En el triángulo ABC, $a = 5.32$, $b = 3.07$, $C = 122°$; halle el lado c.

Solución: Como se conocen dos de los lados del triángulo y el ángulo comprendido entre ellos (figura 9.5-2), use la ley de los cosenos.

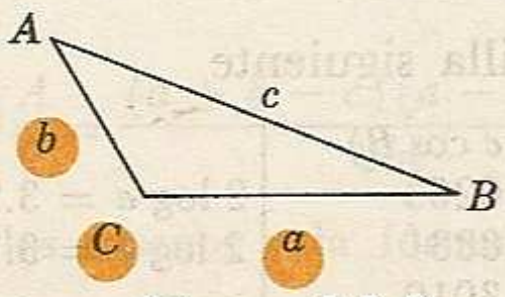


Figura 9.5-2

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C.$$

Sustituya los valores dados, se obtiene

$$c^2 = (5.32)^2 + (3.07)^2 - 2(5.32)(3.07)\cos 122°.$$

Efectúe las operaciones indicadas y recuerde que $\cos 122° = -\cos 58°$:

$$c^2 = 28.3 + 9.42 + 32.7\cos 58°,$$

$$c^2 = 28.3 + 9.42 + 17.3.$$

$$c^2 = 55.02$$

y

$$\boldsymbol{c = 7.42.}$$

CASO 4. SOLUCIÓN LOGARÍTMICA. Cuando se conocen los tres lados de un triángulo se procede primero a calcular el mayor de los ángulos mediante la ley de los cosenos, y luego los otros dos ángulos mediante la ley de los senos. El hallar el mayor de los ángulos con la ley de los cosenos evita cualquier ambigüedad que pudiera presentarse al hacerlo con la ley de los senos. El método que aquí se presenta implica el uso de logaritmos con la mencionada ley de los cosenos; sin embargo, algunos profesores prefieren que el alumno haga uso de las fórmulas de los ángulos mitad, que se discuten en el apéndice de este libro.

Ejemplo. Resolver el triángulo ABC, si $a = 46.10$, $b = 71.43$, y $c = 61.40$.

Solución: Como se conocen los tres lados, el triángulo corresponde al caso 4 (figura 9.5-3).

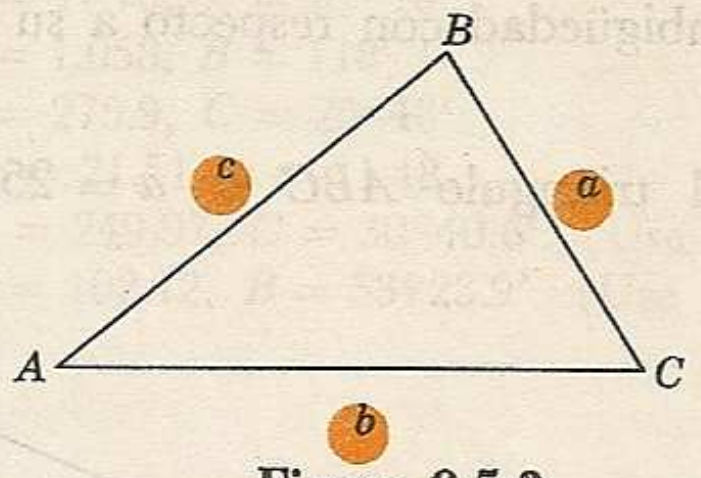


Figura 9.5-3

Dado que b es el lado mayor, calcule primero B, mediante

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

y después los otros ángulos mediante la ley de los senos:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a \operatorname{sen} B}{b} \text{ y } \operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} B}{b}.$$

$a = 46.10$	$\log a = 1.6637$	$2 \log a = 3.3274$	$(a^2 - b^2 + c^2)$
$c = 61.40$	$\log c = 1.7882$	$2 \log c = 3.5764$	$a^2 = 2125$
			$c^2 = 3771$
$b = 71.43$	$\log b = 1.8539$	$2 \log b = 3.7078$	$a^2 + c^2 = 5896$
			$b^2 = 5102$
			$a^2 + c^2 - b^2 = 794$

	(B)
$q = a^2 + c^2 - b^2 = 794$	$\log q = 2.8998$
2	$\operatorname{colog} 2 = 9.6990 - 10$
$a = 46.10$	$\operatorname{colog} a = 8.3363 - 10$
$c = 61.40$	$\operatorname{colog} c = 8.2118 - 10$
$\boxed{B = 81°56'}$	$\log \cos B = 29.1469 - 30$

	(A)	(C)
$B = 81°56'$	$\log \operatorname{sen} B = 9.9957 - 10$	$\log \operatorname{sen} B = 9.9957 - 10$
$b = 71.43$	$\operatorname{colog} b = 8.1461 - 10$	$\operatorname{colog} b = 8.146 - 10$
$a = 46.10$	$\log a = 1.6637$	
$\boxed{A = 39°43'}$	$\log \operatorname{sen} A = 19.8055 - 20$	
$c = 61.40$		$\log c = 1.7882$
$\boxed{C = 58°20'}$		$\log \operatorname{sen} C = 19.9300 - 20$

Comprobación: $A + B + C = 179°59'$ (valor aceptable considerando que durante la interpolación se han redondeado varios números).

Puesto que primero se determinó el ángulo mayor, B, los otros dos ángulos, A y C, serán ángulos del primer cuadrante.

CASO 4. RESOLUCIÓN MEDIANTE EL USO DE LA REGLA DE CÁLCULO. Al igual que en el ejemplo anterior, se empleará primero la ley de los cosenos para obtener uno de los ángulos, y luego, la ley de los senos para hallar los otros dos. Se calcula primero el mayor de los ángulos con el fin de evitar cualquier ambigüedad con respecto a su posición en un cuadrante dado.

Ejemplo. Resuelva el triángulo ABC si $a = 25.3$, $b = 32.7$ y $c = 52.5$

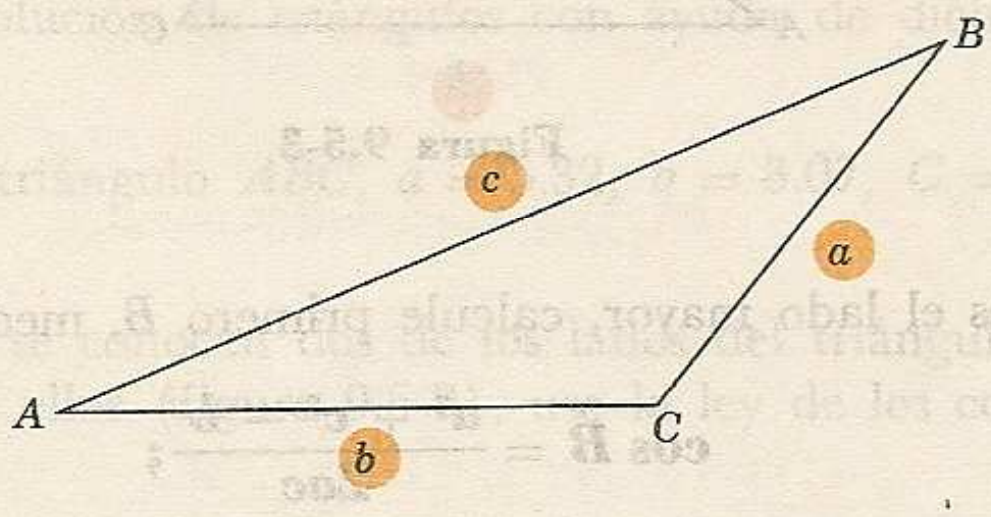


Figura 9.5-4

Solución: Puesto que c es el lado mayor (figura 9.5-4), halle el ángulo C con la ley de los cosenos, mediante

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Sustituyendo los valores dados

$$\cos C = \frac{(25.3)^2 + (32.7)^2 - (52.5)^2}{(2)(25.3)(32.7)},$$

$$\cos C = \frac{640 + 1070 - 2760}{1655}$$

$$\cos C = -0.634.$$

Como cos C es negativo, C está en el segundo cuadrante; se determina entonces èl ángulo reducido $C_r = 50.6°$.

Por lo tanto,

$$C = 129.4°.$$

Aplique ahora la ley de los senos:

$$\frac{\text{sen } 129.4°}{52.5} = \frac{\text{sen } A}{25.3} = \frac{\text{sen } B}{32.7};$$

$$\frac{\text{sen } 50.6°}{52.5} = \frac{\text{sen } A}{25.3} = \frac{\text{sen } B}{32.7}$$

resulta

$$A = 21.8°, \quad B = 28.8°.$$

En consecuencia, la solución es

$$A = 21.8°, \quad B = 28.8°, \quad \text{y} \quad C = 129.4°.$$

EJERCICIOS 9.5

1. Resolver los siguientes triángulos ABC, si

a) $b = 43.70,\ c = 41.70,\ A = 61°10'$.
b) $c = 5.750,\ a = 1.058,\ B = 118°31'$.
c) $a = 378.5,\ b = 275.9,\ C = 25°48'$.
d) $B = 38°06',\ c = 21.51,\ a = 11.48$.
e) $a = 321.34,\ b = 249.07,\ C = 30°40.6'$. (Use tablas de cinco decimales).
f) $a = 109.03,\ c = 102.12,\ B = 53°23.9'$. (Use tablas de cinco decimales).

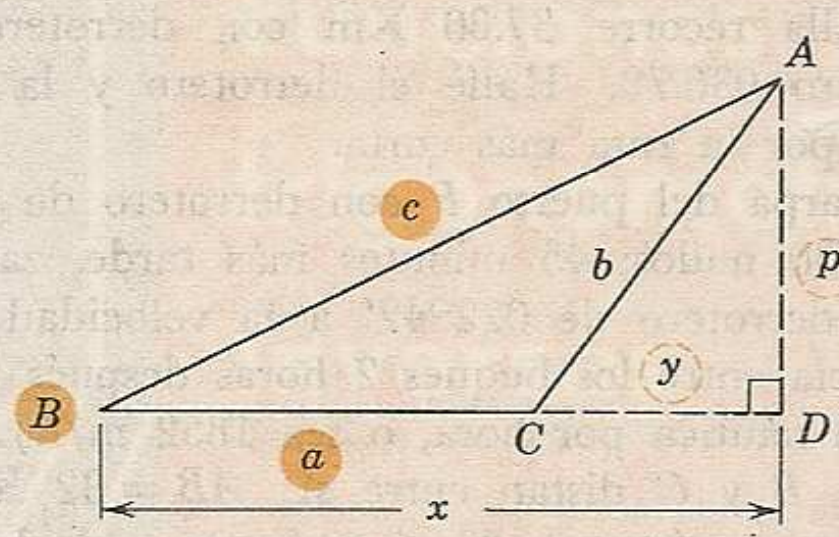


Figura 9.5-5

2. Otra manera de resolver triángulos comprendidos en el caso 3, consiste en trazar la altura relativa al vértice de uno de los ángulos no conocidos, y resolver los dos triángulos rectángulos así formados. (Figura 9.5-5):

$$\boldsymbol{p = c \operatorname{sen} B} \text{ y } \boldsymbol{x = c \cos B.}$$

En el triángulo rectángulo CDA.

$$\boldsymbol{y = x - a;\ \tan \measuredangle ACD = \frac{p}{y};\ b = p \csc \measuredangle ACD;}$$

entonces,

$$\boldsymbol{C = 180° - \measuredangle ACD} \text{ y } \boldsymbol{A = 180° - (B + C).}$$

Use el método para resolver los triángulos siguientes:

a) $a = 152.0,\ b = 129.0,\ C = 15°11'$.
b) $a = 3132,\ b = 2476,\ C = 116°12'$.
c) $B = 67°20',\ a = 20.71,\ c = 28.41$.
d) $b = 6.390,\ c = 4.690,\ A = 126°16'$.
e) $a = 2184,\ b = 717.0,\ C = 34°09'$.

3. Resuelva los siguientes triángulos ABC:

a) $a = 794.0,\ b = 602.3,\ c = 847.0$.
b) a $= 92.41,\ b = 73.59,\ c = 39.81$.
c) $a = 4.377,\ b = 6.211,\ c = 2.168$.
d) $a = 28.40,\ b = 32.51,\ c = 13.70$.
e) $a = 809.17,\ b = 121.36,\ c = 480.79$. (Use tablas de cinco decimales).
f) $a = 5134.2,\ b = 9268.7,\ c = 7313.4$. (Use tablas de cinco decimales)

4. Un topógrafo situado en B observa dos puntos A y C, en los extremos de un lago. Si $BA = 331.7$ m, $BC = 242.2$ m, y el ángulo $ABC = 120°41'$, calcule la distancia AC.

5. Un triángulo está formado por tres fuerzas, $F_1 = 25.07$ dinas, $F_2 = 22.60$ dinas y $F_3 = 41.72$ dinas. Calcule el ángulo que forman F_1 y F_2.

6. Los lados adyacentes de un paralelogramo miden 20.62 y 24.73 cm. Si una de las diagonales mide 32.04 cm, diga si es la mayor o la menor.

7. Una pieza de artillería está en A y no puede ver el blanco C. Si el puesto de mando B está a 35 Km de A y a 22 de C, calcule la distancia de la pieza al blanco si el ángulo ABC es de $50°10'$.

8. Un aeroplano sale del puerto aéreo A a las 10 hs y sigue un derrotero de $42°51'$ volando a 325 Kph. Al mismo tiempo, otro aeroplano sale del puerto aéreo B, situado a 525 Km al este de A y vuela a 280 Kph. Halle el derrotero del segundo aeroplano para que encuentre al primero a las 12 hs.

9. Un bote patrulla recorre 37.80 Km con derrotero 131.3° y después 28.30 Km con derrotero 036.7°. Halle el derrotero y la distancia que debe recorrer, para regresar por la ruta más corta.

10. Un buque A zarpa del puerto P con derrotero de $053°36'$ a la velocidad de crucero de 10.30 nudos; 45 minutos más tarde, zarpa el buque B del mismo puerto con un derrotero de $022°42'$ a la velocidad de crucero de 8.30 nudos. Halle la distancia entre los buques 2 horas después de haber zarpado B. (Un nudo es una milla náutica por hora, o sea 1852 m/h).

11. Tres aldeas A, B y C distan entre sí: $AB = 32$ Km, $BC = 18$ Km y $AC = 20$ Km. La carretera (recta) de A a C, va a prolongarse para que un nuevo camino que parte de B la encuentre en ángulo recto en el punto D. Halle BD y CD.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 9

1. Obtenga la ley de los senos.

2. Obtenga la ley de los cosenos.

3. Resuelva el triángulo ABC si

a) $A = 30°$, $a = 15$, $c = 10$.
b) $A = 48°20'$, $B = 32°10'$, $c = 122$.
c) $A = 60°$, $b = 25$, $c = 50$.
d) $a = 6$, $b = 5$, $c = 9$.

4. Establezca las condiciones que deben llenar las partes de un triángulo para que existan dos soluciones.

5. En el triángulo ABC, los datos son a, b y B $(b < a)$. Diga qué número de soluciones va a haber si

a) $\log \operatorname{sen} A < 0$; *b)* $\log \operatorname{sen} A > 0$; *c)* $\log \operatorname{sen} A = 0$.

6. Resuelva por logaritmos el triángulo ABC si $a = 176.2$, $A = 100°10'$ y $C = 25°05'$.

7. Diga si todo triángulo oblicuángulo puede resolverse usando triángulos rectángulos.

8. Un tren sale de una estación y viaja a 85 Kph en una vía recta; otro tren sale de la misma estación una hora más tarde, sobre otra vía recta que forma con la anterior un ángulo de 118°. Si el segundo tren se desplaza a razón de 50 Kph, halle la distancia entre los trenes 3 horas después de la salida del primer tren.

CAPITULO 10

Funciones trigonométricas inversas

10.1. FUNCIONES INVERSAS

En la Sec. 1.7, se estableció que una función asigna a cada elemento del dominio, una, y solamente una, imagen que desde luego puede ser común a varios o a todos los elementos del dominio. Si la función tiene además la propiedad de que la imagen es exclusiva o sea que cada imagen en el recorrido lo es de un solo elemento del dominio, se dice entonces que esta función establece una correspondencia biunívoca o biyectiva entre los elementos del dominio y las del recorrido. Cuando tal es el caso, se puede definir una nueva función, inversa de la función original, cuyo dominio sea el recorrido de la función original y cuyo recorrido sea el dominio de la primera. Se dice entonces que cada función es la inversa de la otra.

Definición 10.1-1: *Si f es una función, tal que $f(c) \neq f(d)$, en donde c y d son dos elementos diferentes del dominio, y si $f(a) = b$, entonces, la función inversa de f, algunas veces representada por f^{-1}, es la función que asigna a* ***a*** *como imagen de* ***b.*** *El dominio de f^{-1} es el recorrido de f.*

La definición anterior implica que si $f(a) = b$, *entonces* $f^{-1}(b) = a$.

El símbolo "-1" después de f, es la manera de representar a la función inversa y no debe ser confundido con un exponente.

10.2. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

La gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ (figura 10.2-1) muestra claramente que a cada elemento x del dominio, le corresponde una sola imagen, pero que hay muchos elementos del dominio que tienen la misma imagen 0Q. Esto es, la función $\operatorname{sen} x$ no establece una correspondencia biunívoca entre las imágenes del recorrido y los elementos del dominio. Para las otras funciones trigonométricas se pueden establecer deducciones análogas; en consecuencia, con todo rigor, las funciones trigonométricas no tienen funciones inversas. Sin embargo, se puede soslayar este hecho restringiendo el dominio, permitiendo con ello la existencia de una correspondencia biunívoca entre los elementos del dominio restringido y los del recorrido. Para representar funciones trigonométricas *con restricciones en su dominio*, vamos a emplear letras mayúsculas para sus abreviaturas, esto es, *Sen x*, *Cos x*, *Tan x*, *Cot x*, *Sec x*, *Csc x*. Sus funciones inversas se denotarán por

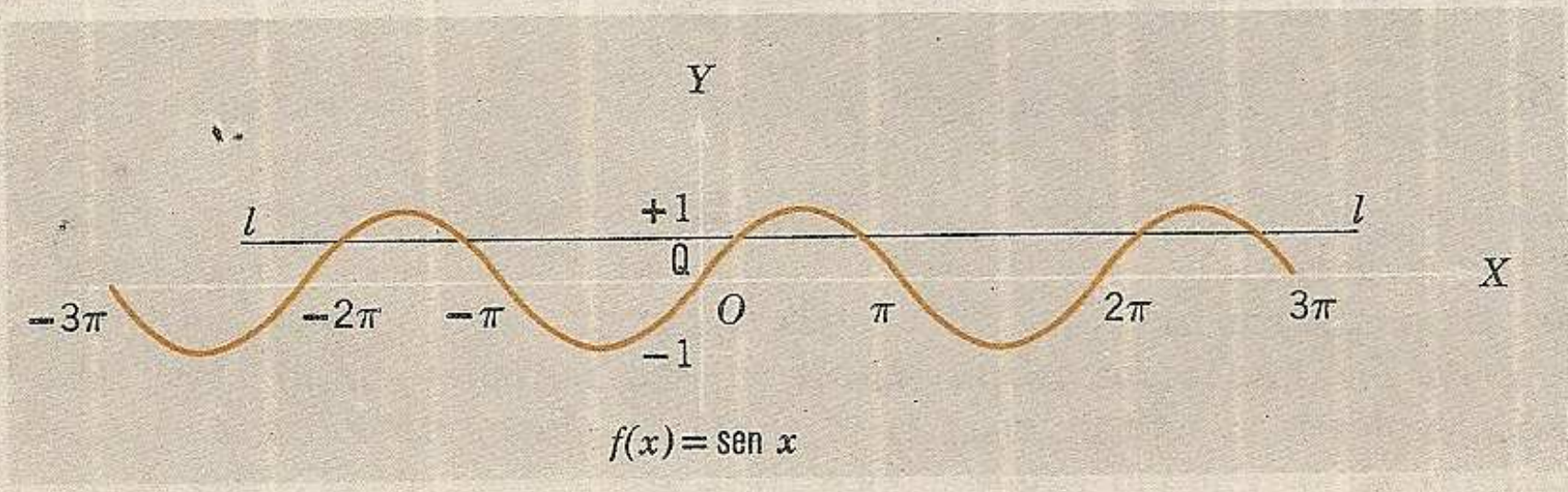


Figura 10.2-1

$Sen^{-1}\ x$, $Cos^{-1}\ x$, $Tan^{-1}\ x$, $Cot^{-1}\ x$, $Sec^{-1}\ x$, $Csc^{-1}\ x$ o por "*arc Sen x*", expresado verbalmente como arco seno x, o más explícitamente, arco cuyo seno es x. Para las otras funciones trigonométricas se utilizan expresiones análogas.

No pierda de vista que lo único que se puede restringir es el dominio, el recorrido no es restringible, ya que sus elementos son las imágenes, bajo f, de los elementos del dominio.

TABLA 10.2-1

Función	Dominio	Recorrido
$y = \text{Sen } x.$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$	$-1 \leqslant y \leqslant 1.$
$y = \text{Cos } x.$	$0 \leqslant x \leqslant \pi.$	$-1 \leqslant y \leqslant 1.$
$y = \text{Tan } x.$	$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$	Todos los números reales.
$y = \text{Cot } x.$	$0 < x < \pi.$	Todos los números reales.
$y = \text{Sec } x.$	$0 \leqslant x < \frac{\pi}{2},$	$y \geqslant 1.$
ó	$-\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}.$	$y \leqslant -1.$
$y = \text{Csc } x.$	$0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},$	$y \geqslant 1.$
ó	$-\pi < x \leqslant -\frac{\pi}{2}.$	$y \leqslant -1.$

Si el dominio de las funciones trigonométricas consta de ángulos, entonces el recorrido de las funciones trigonométricas inversas consta también de ángulos. Esto es, si $y = Sen\ x$, en donde x es un *ángulo*, se dice entonces que su función inversa es $Sen^{-1}\ x$, que se lee "*ángulo* cuyo seno es x".

A partir de la definición de funciones inversas debe quedar perfectamente claro que si $\mathbf{y = sen\ \theta}$, entonces $\theta = \mathbf{Sen^{-1}\ y}$; v.gr.: si $\theta = Sen^{-1}(\frac{1}{2})$, entonces $Sen\ \theta = \frac{1}{2}$.

En la tabla 10.2-1 aparecen los dominios restringidos de las funciones trigonométricas de ángulos medidos en radianes, o de números reales.

En la tabla 10.2-2 aparece la lista de las funciones trigonométricas inversas.

Los elementos del recorrido de cada una de las funciones trigonométricas inversas enumeradas en la tabla anterior, suelen recibir el nombre de valores principales de la función. El nombre se originó en el pasado, cuando aún no se definía una función como en la sección 1.7 y podían existir varias imágenes de un solo elemento del dominio.

TABLA 10.2-2

Función	Dominio	Recorrido
$y = \text{arc Sen } x.$	$-1 \leqslant x \leqslant 1.$	$-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$
$y = \text{arc Cos } x.$	$-1 \leqslant x \leqslant 1.$	$0 \leqslant y \leqslant \pi.$
$y = \text{arc Tan } x.$	Todos los números reales.	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$
$y = \text{arc Cot } x.$	Todos los números reales.	$0 < y < \pi.$
$y = \text{arc Sec } x.$	$x \geqslant 1,$	$0 \leqslant y < \frac{\pi}{2},$
ó	$x \leqslant -1.$	$-\pi \leqslant y < -\frac{\pi}{2}.$
$y = \text{arc Csc } x.$	$x \geqslant 1,$	$0 < y \leqslant \frac{\pi}{2},$
ó	$x \leqslant -1.$	$-\pi < y \leqslant -\frac{\pi}{2}.$

Ejemplo 1. Halle el valor de arc Cos $(-\frac{1}{2})$.

Solución: Sea

$$\theta = \text{arc Cos } (-\tfrac{1}{2});$$

entonces,

$$\text{Cos } \theta = -\tfrac{1}{2}.$$

Se debe, pues, determinar un ángulo cuyo coseno sea $-\frac{1}{2}$ y que esté contenido en el recorrido $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; se concluye que $\theta_r = 60° = \pi/3$ $\therefore$

$$\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Ejemplo 2. Halle el valor de cos [arc Tan $(-\frac{3}{4})$].

Solución: Sea

$$\theta = \text{arc Tan } (-\tfrac{3}{4})$$

entonces

$$\text{Tan } \theta = -\tfrac{3}{4}.$$

El recorrido de la tangente inversa implica que θ debe ser un ángulo del cuarto cuadrante; por consiguiente, de acuerdo con el esquema de la figura 10.2-2, se tiene

$$\cos \theta = \tfrac{4}{5}.$$

y finalmente

$$\cos\left[\text{arc Tan}\left(-\frac{3}{4}\right)\right] = \frac{4}{5}.$$

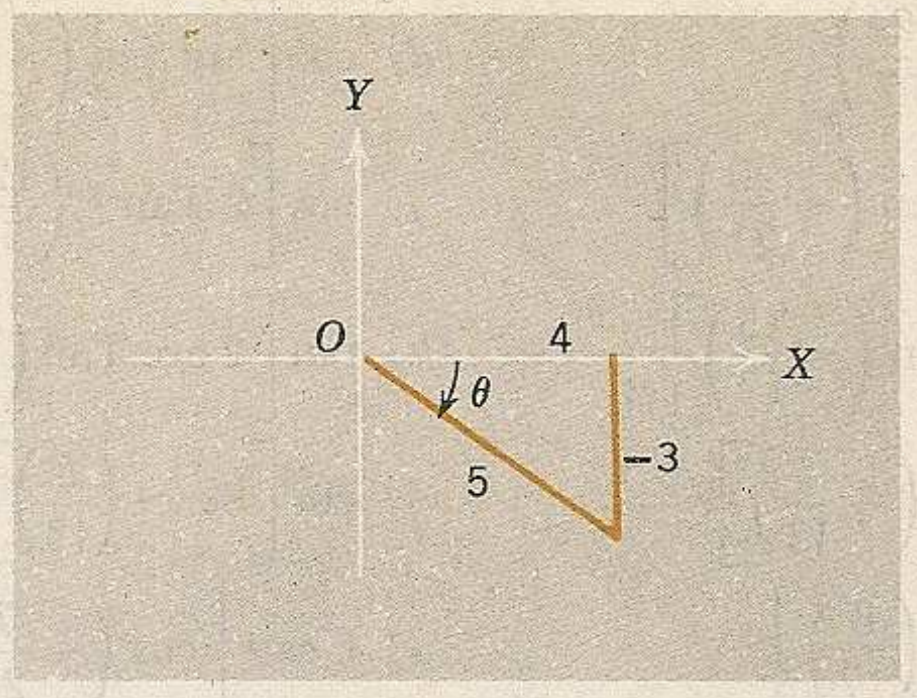


Figura 10.2-2

EJERCICIOS 10.2

1. Elabore una tabla en la que aparezcan los dominios restringidos y los recorridos de las funciones trigonométricas si su argumento es un ángulo medido en grados. Establezca también las inversas de esas funciones.

2. Halle los valores de:

a) Sen 30°. *b)* Sen $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. *c)* Sen $\frac{2\pi}{3}$.

d) Cos π. *e)* Cos $(-90°)$. *f)* Tan 135°.

3. Escriba la inversa de cada una de las funciones dadas:

a) $\text{Sen}^{-1}\, x$. *b)* $\text{Cos}^{-1}\, u$. *c)* $2\,\text{Sen}^{-1}\, x$.

d) $\text{Cos}^{-1}\, 4x$. *e)* $\text{Tan}^{-1}\, (u - v)$. *f)* $\text{Sec}^{-1}\, (4 + x^2)$.

g) arc Sen $(\sqrt{1 + x^2})$. *h)* arc Cos (x^2). *i)* arc Tan $\left(\frac{x+1}{3}\right)$

4. Halle el valor de los ángulos que siguen:

a) $\text{Sen}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$. *b)* $\text{Sen}^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. *c)* $\text{Cos}^{-1}\,(-1)$.

d) arc Cos $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. *e)* arc Sen 0. *f)* arc Sen $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

g) $\text{Tan}^{-1}\, 1$. *h)* $\text{Tan}^{-1}\,(-\sqrt{3})$. *i)* arc Tan $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$.

j) arc Cot $\frac{\sqrt{3}}{3}$. *k)* $\text{Cot}^{-1}\, 0$. *l)* $\text{Cot}^{-1}\, \sqrt{3}$.

5. Use tablas o regla de cálculo para hallar el valor de los números reales siguientes:

a) $\text{Sen}^{-1}\,(0.6594)$. *b)* arc Sen (-0.857). *c)* arc Cos (-0.5234).

d) $\text{Cos}^{-1}\,(0.329)$. *e)* $\text{Tan}^{-1}\,(-2.37)$. *f)* arc Tan (-0.964).

6. Halle el valor de:

a) sen $\left(\text{Cos}^{-1}\,\frac{3}{4}\right)$. *b)* sen $\left[\text{Tan}^{-1}\left(-\frac{8}{15}\right)\right]$.

c) $\cos\left(\text{Cot}^{-1}\,\frac{24}{7}\right)$.

d) $\cos\left[\text{arc Sen}\left(-\frac{35}{37}\right)\right]$.

e) $\cos\left[\text{arc Tan}\left(-\frac{20}{21}\right)\right]$.

f) $\cos\left[2\,\text{Tan}^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)\right]$.

g) $\tan\left[\text{arc Sen}\left(-\frac{15}{17}\right)\right]$.

h) $\tan\left[2\,\text{arc Tan}\left(\frac{3}{4}\right)\right]$.

i) $\tan\left[\text{Sen}^{-1}\left(-\frac{5}{13}\right)\right]$.

j) $\cot\left[\text{Sen}^{-1}\left(\frac{5}{13}\right)\right]$.

k) $\text{Sen}^{-1}\left[\text{sen}\left(\frac{8}{17}\right)\right]$.

l) $\text{Cos}^{-1}\left[\cos\left(-\frac{7}{25}\right)\right]$.

7. Halle el valor de:

a) $\text{Cos}^{-1}\,(\cos 3\pi)$.

b) $\text{Sen}^{-1}\left[\left(\text{sen} -\frac{3\pi}{2}\right)\right]$.

c) $\text{Sen}^{-1}\left(\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$.

d) $\text{Cos}^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right)$.

e) $\text{Sen}\,[\text{Cos}^{-1}\,(-1)]$.

f) $\text{Sen}\,(\text{Cos}^{-1}\,1)$.

8. Establezca los valores de x para los cuales cada una de las siguientes ecuaciones, es cierta.

a) $\text{Sen}^{-1}\,(\text{sen}\,x) = x$.
b) $\text{Sen}^{-1}\,[\text{sen}\,(-x)] = x$.
c) $\text{Cos}^{-1}\,(\cos x) = x$.
d) $\text{Cos}^{-1}\,[\cos\,(-x)] = x$.
e) $\text{Tan}^{-1}\,(\tan x) = x$.
f) $\text{Tan}^{-1}\,[\tan\,(-x)] = x$.

9. Halle el valor de:

a) $\cos\left(90° - \text{arc Tan}\,\frac{3}{4}\right)$.

b) $\sec\,(90° - \text{Sec}^{-1}\,2)$.

c) $\tan\left(90° - \text{arc Sen}\,\frac{5}{12}\right)$.

10. Halle el valor de:

a) $\cot\,(\text{Tan}^{-1}\,0.3973)$.
b) $\cos\,[\text{Tan}^{-1}\,(-0.8542)]$.
c) $\text{Cos}^{-1}\,(\tan 327°10')$.
d) $\text{Sen}^{-1}\,[\cos\,(200°25')]$.

10.3 RELACIONES ENTRE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Los ejemplos que siguen muestran algunos métodos para la obtención de ciertas relaciones entre funciones trigonométricas inversas.

Ejemplo 1. Exprese $\text{Cos}^{-1}\,y$ en términos de un seno inverso.

Solución: Sea $\theta = \cos^{-1} y$; entonces, $y = \text{Cos}\,\theta$. De la identidad fundamental, $\text{Sen}^2\,\theta + \text{Cos}^2\,\theta = 1$, se tiene

$$\text{Sen}\,\theta \equiv \pm\sqrt{1 - \text{Cos}^2\,\theta}.$$

Para $\text{Cos}\,\theta$,

$$0 \leqslant \theta \leqslant \pi;\ \text{entonces,}\ \text{Sen}\,\theta > 0.$$

ó

$$\text{Sen}\,\theta = \sqrt{1 - y^2},$$

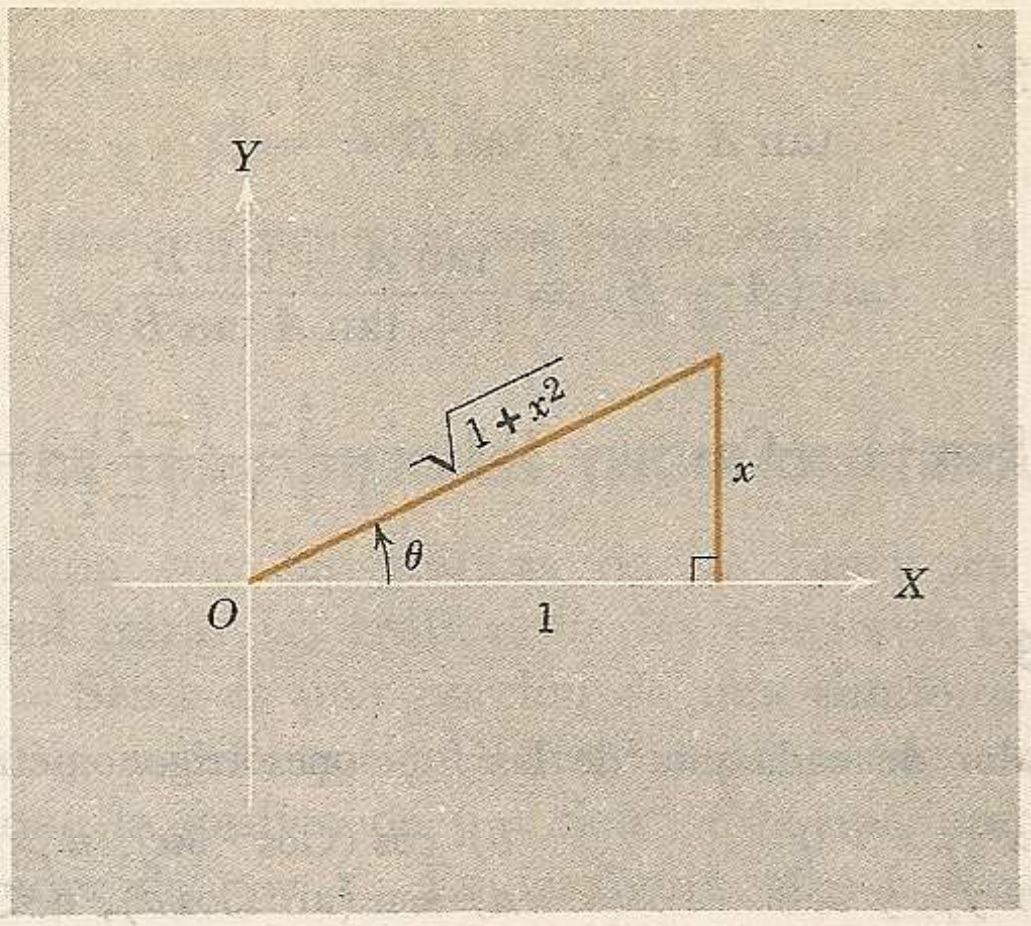


Figura 10.3-1

$$\theta = \text{Sen}^{-1}\sqrt{1-y^2}.$$

Consecuentemente,

$$\textbf{Cos}^{-1}\, y = \textbf{Sen}^{-1}\sqrt{1-y^2}.$$

Ejemplo 2. Halle el valor de sen (2 arc Tan x), para $x > 0$.

Solución: Sea $\theta = \text{arc Tan}\, x$; entonces, $\text{Tan}\,\theta = x$. Se desea obtener $\text{sen}\, 2\theta \equiv 2\,\text{sen}\,\theta\,\cos\theta$. Para $x > 0$, $0 < \theta < \pi/2$. (¿Por qué?).

De la figura 10.3-1, se tiene

$$\text{sen}\, 2\theta = 2\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

$$\textbf{sen (2 arc Tan } x\textbf{)} = \frac{\textbf{2}x}{\textbf{1} + x^2}.$$

Ejemplo 3. Halle el valor de $\tan\left[\text{Sen}^{-1}\frac{3}{5} - \text{Cos}^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)\right]$.

Solución: Sea $A = \text{Sen}^{-1}\frac{3}{5}$ y $B = \text{Cos}^{-1}\left(-\frac{4}{5}\right)$.

Entonces,

$$\text{Sen}\, A = \tfrac{3}{5}, \text{ y } \text{Cos}\, B = -\tfrac{4}{5}.$$

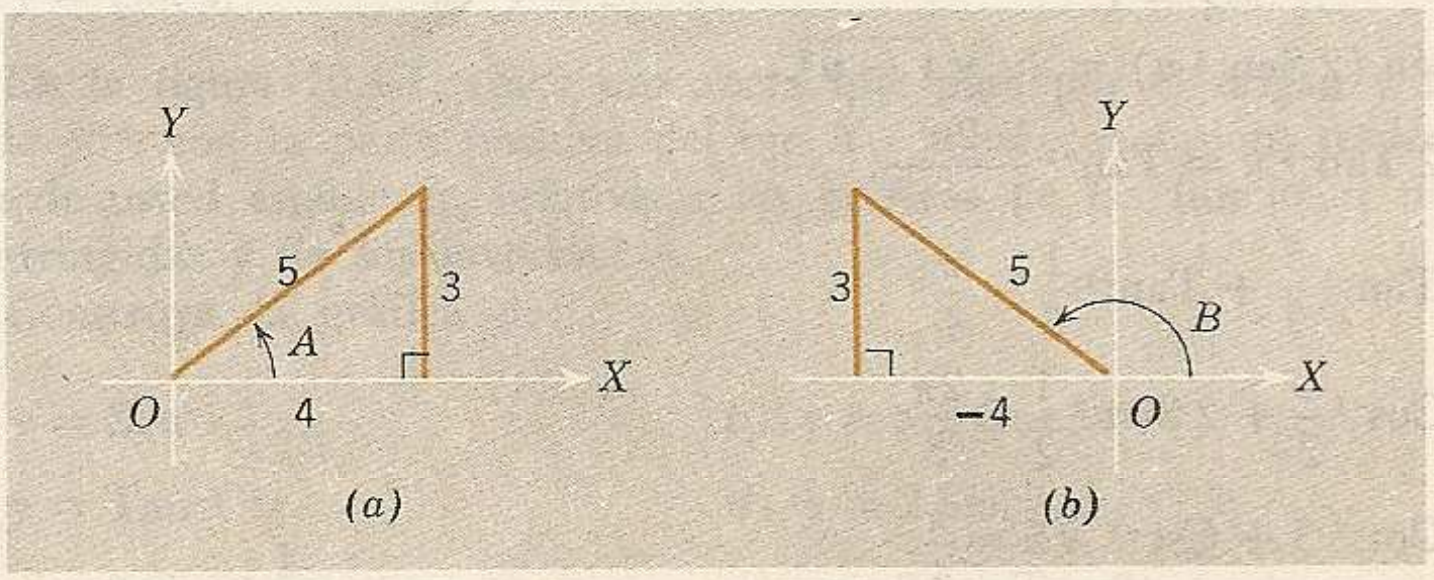


Figura 10.3-2

De la figura 10.3-2:

$$\tan A = \tfrac{3}{4} \text{ y } \tan B = -\tfrac{3}{4};$$

y como

$$\tan (A - B) \equiv \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B},$$

$$\textbf{tan } [\textbf{Sen}^{-1} \tfrac{3}{5} - \textbf{Cos}^{-1} (-\tfrac{4}{5})] = \frac{\frac{3}{4} - (-\frac{3}{4})}{1 + (\frac{3}{4})(-\frac{3}{4})} = \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{7}}.$$

EJERCICIOS 10.3

1. Halle el valor de cada una de las funciones trigonométricas siguientes:

a) sen $(\text{Sen}^{-1} x^2)$, $x > 0$.
b) cos $(\text{Cos}^{-1} 3u)$, $u > 0$.
c) tan $(\text{arc Cos } y)$, $y < 0$.
d) sen $(\text{arc Cos } v)$, $v < 0$.
e) sen $(2 \text{ Sen}^{-1} u)$, $u < 0$.
f) cos $(2 \text{ arc Sen } x)$, $x > 0$.
g) sen $(2 \text{ arc Tan } v)$, $v > 0$.
h) cos $(2 \text{ Cos}^{-1} y)$, $y < 0$.

i) $\cos \left[\text{Sen}^{-1} \frac{3}{5} + \text{Cos}^{-1} \frac{8}{17} \right]$.

j) $\tan \left[\text{Sen}^{-1} \frac{4}{5} - \text{Cot}^{-1} \frac{1}{2} \right]$.

k) $\text{sen} \left[\text{Sen}^{-1} \left(-\frac{24}{25} \right) - \text{Cos}^{-1} \frac{12}{13} \right]$.

l) $\tan \left[\text{arc Tan} \left(-\frac{8}{15} \right) + \text{arc Cos} \left(\frac{3}{5} \right) \right]$.

m) $\text{sen} \left[\text{arc Cot} \left(\frac{24}{7} \right) + \text{arc Sen} \left(-\frac{5}{13} \right) \right]$.

n) $\cos \left[\text{arc Sen} \left(-\frac{15}{17} \right) + \text{arc Cos} \left(\frac{12}{13} \right) \right]$.

2. Pruebe las relaciones siguientes indicando los valores que puede tomar el argumento.

a) $2 \text{ Sen}^{-1} x = \text{Cos}^{-1} (1 - 2x^2)$.

b) $\text{Sen}^{-1} y = \text{Cos}^{-1} \sqrt{1 - y^2}$.

c) $\text{Sen}^{-1} u = \text{Tan}^{-1} \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}$, $(1 - u^2 \neq 0)$.

d) $2 \text{ Cot}^{-1} x = \text{Csc}^{-1} \frac{1 + x^2}{2x}$, $(x \neq 0)$.

e) $\text{Tan}^{-1} u + \text{Tan}^{-1} v = \text{Tan}^{-1} \frac{u + v}{1 - uv}$.

f) $\text{sen } (2 \text{ Sen}^{-1} u) = 2u \sqrt{1 - u^2}$.

g) $2 \text{ Tan}^{-1} u = \text{Tan}^{-1} \frac{2u}{1 - u^2}$.

h) $\text{Tan}^{-1} \frac{5}{7} + \text{Tan}^{-1} \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4}$.

i) $\text{Cos}^{-1} \frac{1}{2} + 2 \text{ Sen}^{-1} \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$.

j) $\text{Cot}^{-1} 3 + \text{Csc}^{-1} \sqrt{5} = \frac{\pi}{4}$.

k) $3 \text{ Sen}^{-1} u = \text{Sen}^{-1} (3u - 4u^3)$.

3. Muestre que: *a)* $\text{Sen}^{-1}(-x) = -\text{Sen}^{-1}(x)$.

b) $\text{Cos}^{-1}(-x) = \pi - \text{Cos}^{-1}(x)$.

4. Diga si las funciones siguientes son pares, impares o ni una ni otra cosa:

a) $f(x) = \text{arc Sen}(x)$. *b)* $f(x) = \text{arc Cos}\, x$.

10.4 GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Por comparación con las gráficas de las funciones directas, resulta más o menos fácil trazar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas. Como $y = \text{Sen}\, x$ es una porción de una sinusoide que oscila alrededor del eje X, y puesto que $y = \text{Sen}^{-1}\, x$ se puede escribir como $x = Sen\, y$, es claro que la gráfica de $y = \text{Sen}^{-1}\, x$ es una porción de sinusoide que oscila alrededor del eje Y. En la figura 10.4-1 se muestran las gráficas de $y = \text{Sen}^{-1}\, x$, $y = \text{Cos}^{-1}\, x$, y $y = \text{Tan}^{-1}\, x$. Las líneas interrumpidas corresponden a las gráficas de $y = \text{Sen}\, x$, $y = \text{Cos}\, x$, y $y = \text{Tan}\, x$.

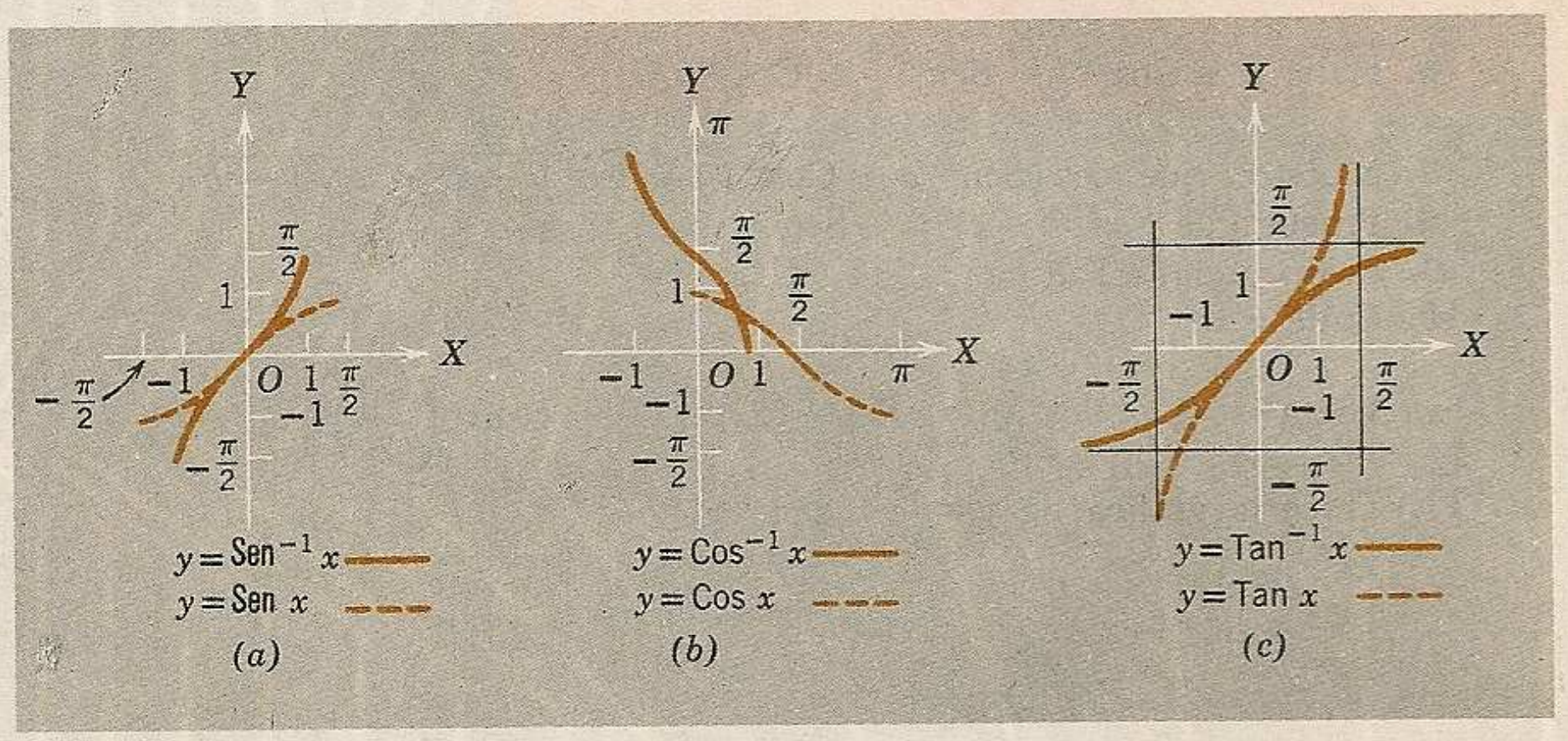


Figura 10.4-1

EJERCICIOS 10.4

1. Construya la gráfica de:

a) $y = \text{Cot}^{-1}\, x$. *b)* $y = \text{Sec}^{-1}\, x$. *c)* $y = \text{Csc}^{-1}\, x$.
d) $y = \text{Cot}\, x$. *e)* $y = \text{Sec}\, x$. *f)* $y = \text{Csc}\, x$.

2. En la figura 10.4-1, trace una recta que pase por el origen y forme un ángulo de 45° con la parte positiva del eje X. ¿Qué conclusión, respecto a esa recta puede usted establecer, relativa a las gráficas de las funciones trigonométricas restringidas y de sus inversas?

3. Construya la gráfica de:

a) $y = \text{Sen}^{-1}\, \frac{1}{2}\, x$. *b)* $y = \text{arc Cos}\, 3x$.
c) $y = \text{Tan}^{-1}\, 4x$. *d)* $y = 2\, \text{Sen}^{-1}\, x$.
e) $y = 2\, \text{Cos}^{-1}\, \frac{1}{2}\, x$. *f)* $y = 3\, \text{arc Tan}\, 2x$.

g) $y + \frac{\pi}{2} = \text{Sen}^{-1}\, x.$

h) $y = \frac{1}{3}\,\text{Cos}^{-1}\, 2x + \frac{\pi}{6}.$

i) $y = -3\,\text{Sen}^{-1}\,(x) - 2.$

j) $y = \text{Cos}^{-1}\, x + \text{Sen}^{-1}\, x.$

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 10

1. Diga qué significa función inversa.

2. *a)* Diga si $y^2 = x$ puede tener inversa y por qué,

b) Diga si $y = x^2$ puede tener inversa y por qué.

3. Diga una condición geométrica para que una función pueda tener inversa.

4. Establezca el valor de

a) Sen 45°; *b)* Sen (−45°); *c)* Sen 135°.

5. Halle el valor de:

a) arc sen 0.8573. *b)* $\text{Sen}^{-1}\, 1 + \text{Cos}^{-1}\, 1.$

c) arc Cos $(\text{Sen}^{-1}\, 0)$.

6. Halle u si $\text{Cos}^{-1}\, \frac{3}{5} - \text{Sen}^{-1}\, \frac{4}{5} = \text{Cos}^{-1}\, u.$

7. Muestre que $\cos\,(\text{Sen}^{-1}\, a + \text{Cos}^{-1}\, b) = b\,\sqrt{1 - a^2} - a\,\sqrt{1 - b^2}.$

8. Pruebe que $\text{Sen}^{-1}\,(-x) = -\text{Sen}^{-1}(x).$

9. Evalúe $\tan\,(2\,\text{Tan}^{-1}\, x).$

10. Halle x si:

a) $3\,\text{Sen}^{-1}\, x = \frac{\pi}{2}.$ *b)* $\text{Sen}^{-1}\,(2x - x^2) = \text{Sen}^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right).$

11. Trace la gráfica de $y = \frac{\pi}{2} + \text{Sen}^{-1}\, x.$

CAPITULO 11

Ecuaciones trigonométricas

11.1. INTRODUCCION

Una ecuación trigonométrica es aquella que contiene funciones trigonométricas de ángulos o de números reales. A diferencia de la identidad trigonométrica, la ecuación trigonométrica no se satisface para todos los valores del ángulo o del número real. Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar todos los ángulos o todos los números reales que la satisfacen. Como los ángulos coterminales poseen idénticos valores de sus funciones trigonométricas, resulta que si θ es una solución, también lo es $\theta \pm n \cdot 360°$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Por comodidad, las soluciones se restringirán a ángulos no negativos y menores que 360°, restricción que se expresa por el símbolo $0° \leqq \theta < 360°$. Para números reales, u, las soluciones se restringirán a valores de u tales que $0 \leqq u < 2\pi$.

11.2. ECUACIONES QUE SE RESUELVEN MEDIANTE OPERACIONES ALGEBRAICAS SIMPLES

No existe un método general para la resolución de las ecuaciones trigonométricas. Sin embargo, si una ecuación se puede resolver para una o más funciones trigonométricas, se pueden, entonces, determinar los valores correspondientes de los ángulos. Los métodos de resolución son parcialmente algebraicos y parcialmente trigonométricos. Al extraer la raíz cuadrada a ambos miembros de una ecuación o al dividirlos entre un número, se debe tener cuidado de no perder una raíz. Si ambos miembros de la ecuación se elevan al cuadrado, o se multiplican por un factor variable, se debe verificar si no se han introducido una o más raíces extrañas. Para ello, se sustituyen en la ecuación original todas las raíces obtenidas y se descartan las que no la satisfagan.

Los ejemplos siguientes servirán para mostrar el camino seguido en la resolución de ecuaciones trigonométricas.

Ejemplo 1. Resuelva la ecuación

$$2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen}\theta, \quad 0° \leqq \theta < 360°.$$

Solución: Pase $\operatorname{sen}\theta$ al primer miembro y factorice;

$$\operatorname{sen}\theta\,(2\cos\theta - 1) = 0.$$

Iguale a cero cada factor y simplifique; se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = 0, \text{ y } \cos\theta = \tfrac{1}{2}.$$

Por tanto,

$$\theta = 0°, \ 180°, \text{ y } \theta = 60°, \ 300°;$$

y las soluciones son

$$\theta = \mathbf{0°, \ 60°, \ 180°, \ 300°.}$$

Los valores anteriores se verifican sustituyéndolos en la ecuación original.

Ejemplo 2. Resuelva la ecuación $2\,\text{sen}^4\,u - 9\,\text{sen}^2\,u + 4 = 0$, $0 \leqq u < 2\pi$.

Solución: Factorizando;

$$(2\,\text{sen}^2\,u - 1)\,(\text{sen}^2\,u - 4) = 0.$$

Iguale a cero cada factor y simplifique:

$$\text{sen}^2\,u = \tfrac{1}{2};\ \text{sen}^2\,u = 4.$$

ó

$$\text{sen}\,u = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};\ \text{sen}\,u = \pm 2.$$

La segunda igualdad no interesa puesto que *sen u* **no puede** ser mayor que 1. De la primera se obtiene

$$u = \pi/4,\ 3\pi/4,\ 5\pi/4,\ 7\pi/4.$$

Ejemplo 3. Resuelva la ecuación

$$3\tan^2\theta + 4\tan\theta - 1 = 0,\ 0° \leqq \theta < 360°.$$

Solución: Dado que la ecuación anterior no es fácilmente factorizable, aplique la fórmula general para la resolución de las de segundo grado, considerando *tan* θ como incógnita.

$$\tan\theta = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - (4)(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6}.$$

Por tanto,

$$\tan\theta = 0.215 \text{ y } \tan\theta = -1.55.$$

Usando las tablas o la regla de cálculo, se encuentra

$$\theta = 12°10',\ 192°10',\ \text{y}\ \theta = 122°50',\ 302°50'.$$

En consecuencia, las soluciones son

$$\theta = \mathbf{12°10',\ 122°50',\ 192°10',\ 302°50'.}$$

EJERCICIOS 11.2

Resolver las ecuaciones siguientes para $0° \leqq \theta < 360°$, ó $0 \leqq u < 2\pi$.

1. $2\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0.$
2. $2\cos\theta + \sqrt{3} = 0.$
3. $\text{sen}\,u + 2\,\text{sen}^2\,u = 0.$
4. $\tan^2 u - \tan u = 0.$
5. $\text{sen}^2\,\theta - 2\,\text{sen}\,\theta = 0.$
6. $\tan\theta\,\text{sen}\,\theta - \sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta = 0.$
7. $\text{sen}\,u - \text{sen}\,u\cot u = 0.$
8. $4\,\text{sen}\,u\cos^2 u - \text{sen}\,u = 0.$
9. $\cos\theta - 2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta = 0.$
10. $2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + \cos\theta = 0.$
11. $2\,\text{sen}^2\,u - \text{sen}\,u - 1 = 0.$
12. $3\cos^2 u + \cos u - 2 = 0.$
13. $\cot^2\theta - 2\cot\theta - 3 = 0.$
14. $\text{sen}^2\,\theta - 2\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0.$
15. $2\cos^2 u - \cos u - 1 = 0.$
16. $2\sqrt{2}\,\text{sen}\,u\cos u - \sqrt{6}\cos u + \sqrt{3} - 2\,\text{sen}\,u = 0.$

17. $\cot^2\theta\cos\theta - 3\cos\theta + \cot^2\theta - 3 = 0$. **18.** $\cot^2\theta - 5\cot\theta + 6 = 0$.

19. $2\csc^2 u + 11\csc u + 15 = 0$. **20.** $21\operatorname{sen}^2 u - 5\operatorname{sen} u + 6 = 0$.

21. $\tan^2\theta + 2\tan\theta - 1 = 0$. **22.** $9\operatorname{sen}^2\theta - 12\operatorname{sen}\theta - 1 = 0$.

23. $2\cos^2 u + \cos u - 5 = 0$. **24.** $\operatorname{sen}^2 u - 2\operatorname{sen} u + 1 = 0$.

25. $2\operatorname{sen}^4\theta - 9\operatorname{sen}^2\theta + 4 = 0$. **26.** $6\tan^4\theta + 13\tan^2\theta + 5 = 0$.

27. $\cot^4 u - 5\cot^2 u + 4 = 0$. **28.** $15\cos^4 u - 22\cos^2 u + 8 = 0$.

29. $\operatorname{sen}^4\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta - 1 = 0$. **30.** $\tan^4\theta - 2\tan^2\theta - 1 = 0$.

11.3. ECUACIONES QUE SE RESUELVEN MEDIANTE REDUCCIONES TRIGONOMETRICAS

Si en una ecuación hay diferentes funciones trigonométricas o funciones trigonométricas de ángulos múltiples, es frecuente que se pueda reducirlas a formas más simples mediante el uso de entidades trigonométricas. Siempre que sea posible conviene evitar el uso de radicales.

Ejemplo 1. Resuelva la ecuación

$$\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta = 0,\ 0° \leqq \theta < 360°.$$

Solución: Como $\cos 2\theta \equiv 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$, la ecuación dada se puede escribir en la forma $1 - 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta = 0$.

Ordenando y factorizando, se tiene

$$(2\operatorname{sen}\theta - 1)(\operatorname{sen}\theta + 1) = 0.$$

Igualando a cero cada factor:

$$\operatorname{sen}\theta = \tfrac{1}{2},\ \text{y}\ \operatorname{sen}\theta = -1,$$

de donde

$$\theta = \mathbf{30°,\ 150°,\ y\ 270°.}$$

Ejemplo 2. Resuelva la ecuación $-2\operatorname{sen} u + 3\cos u = 1,\ 0 \leqq u < 2\pi$.

Solución: Pase $3\cos u$ al segundo miembro y eleve al cuadrado ambos miembros, para obtener

$$4\operatorname{sen}^2 u = 1 - 6\cos u + 9\cos^2 u$$

ó

$$13\cos^2 u - 6\cos u - 3 = 0,$$

$$\cos u = \frac{6 \pm \sqrt{192}}{26} = \frac{6 \pm 13.86}{26};$$

entonces

$$\cos u = 0.764\ \text{y}\ \cos u = -0.302.$$

Usando la tabla II, se encuentra

$$u = \mathbf{0.701,\ 5.58,}\ \text{y}\ u = \mathbf{1.88,\ 4.41.}$$

Como durante la resolución elevó al cuadrado los dos miembros, compruebe las soluciones para ver si se han introducido raíces extrañas. Sustituyendo los valores de u en la ecuación original, se encuentra que $u = 5.58$ y $u = 1.88$ **no** satisfacen la ecuación. En consecuencia, las soluciones son:

$$\boldsymbol{u = 0.701} \text{ y } \boldsymbol{u = 4.41.}$$

En algunos casos resulta más fácil considerar como incógnita un múltiplo del ángulo, v.gr., 2θ, 3θ, $\frac{1}{2}\theta$. Cuando se sigue este procedimiento se debe tener cuidado de que la solución implique solamente ángulos en el intervalo permitido; esto es, si θ está entre $0°$ y $360°$, 2θ estará entre $0°$ y $720°$, y $\frac{1}{2}\theta$ entre $0°$ y $180°$.

Ejemplo 3. Resuelva la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

para

$$0° \leqq \theta < 360°.$$

Solución: Sustituya $\operatorname{sen}\theta\cos\theta$ por $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta$:

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4},$$

y

$$\operatorname{sen}2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como θ queda en el intervalo $0° \leqq \theta < 360°$, 2θ queda en

$$0° \leqq 2\theta < 720°;$$

se tiene así:

$$2\theta = 240°,\ 300°,\ 600°,\ 660°,$$

y en consecuencia, las soluciones son

$$\boldsymbol{\theta = 120°,\ 150°,\ 300°,\ 330°.}$$

EJERCICIOS 11.3

Resuelva las ecuaciones siguientes, para $0° \leqq \theta < 360°$, ó $0 \leqq u < 2\pi$.

1. $\operatorname{sen}2\theta\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0.$
2. $\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0.$
3. $\cos 2u + 3\cos u + 1 = 0.$
4. $\cos 2u - \operatorname{sen}u - 1 = 0.$
5. $\operatorname{sen}2\theta - \cos\theta = 0.$
6. $\operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}\theta = 0.$
7. $2\cos^2 u + \operatorname{sen}u - 1 = 0.$
8. $3\operatorname{sen}u - 2\cos^2 u = 0.$
9. $\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta + 1 = 0.$
10. $2\cos\theta = \cot\theta.$
11. $\cos 2u + 2\cos u + 1 = 0.$
12. $\cot^2 u - 2\csc^2 u + 5 = 0.$
13. $2\cos\theta - 3\tan\theta = 0.$
14. $\sec^2\theta + 4\tan\theta = 0.$
15. $\operatorname{sen}^2 u - \cos^2 u = 0.$
16. $\cos u\operatorname{sen}2u + 3\operatorname{sen}^2 u + 3\operatorname{sen}u = 0.$
17. $\cos\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 1 = 0.$
18. $3\operatorname{sen}\theta - \cos^2 - 3 = 0.$
19. $\cos^2 u + 4\operatorname{sen}u - 4 = 0.$
20. $3\cos u + \operatorname{sen}^2 u - 3 = 0.$

21. $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}$.

22. $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = -\frac{1}{2}$.

23. $\cos u + \operatorname{sen} u + 1 = 0$.

24. $\cos 2u = \cos^2 u$.

25. $\tan 2\theta = \tan\theta$.

26. $\operatorname{sen}^2 3\theta = \frac{1}{4}$.

27. $\cos\frac{1}{2}u = 1 + \cos u$.

28. $4\cos u - 3\operatorname{sen} u = 5$.

29. $\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$.

30. $2\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1$.

11.4. ECUACIONES DE LA FORMA A SEN $\theta + B$ COS $\theta = C$

Algunos tipos de ecuaciones trigonométricas se pueden resolver por métodos especiales. La ecuación

$$a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta = c, \tag{11.4-1}$$

donde a, b y c son constantes *diferentes de cero*, y $c \leqq \sqrt{a^2 + b^2}$, se puede resolver mediante un método análogo al del problema de sumar una función seno y una función coseno, que se aplicó en el ejemplo del Art. 7.3. Si $c = 0$, la ecuación se reduce a la forma $\tan\theta = -b/a$. Haga

$$a = r\cos\alpha \text{ y } b = r\operatorname{sen}\alpha,$$

donde r y α son constantes, y $r > 0$.

La ecuación 11.4-1 se escribe

$$r\cos\alpha\operatorname{sen}\theta + r\operatorname{sen}\alpha\cos\theta = c$$

ó

$$r(\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \cos\theta\operatorname{sen}\alpha) = c.$$

Como $\operatorname{sen}(\theta + \alpha) \equiv \operatorname{sen}\theta\cos\alpha + \cos\theta\operatorname{sen}\alpha$, se tiene de inmediato

$$r\operatorname{sen}(\theta + \alpha) = c,$$

y

$$\operatorname{sen}(\theta + \alpha) = \frac{c}{r},$$

donde r y α se calculan de

$$a = r\cos\alpha \text{ y } b = r\operatorname{sen}\alpha.$$

Ejemplo. Resuelva la ecuación $-2\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta = 1$, para

$$0° \leqq \theta < 360°.$$

Solución: La solución será de la forma

$$\operatorname{sen}(\theta + \alpha) = \frac{c}{r}.$$

De las relaciones $-2 = r\cos\alpha$ y $3 = r\operatorname{sen}\alpha$, se puede trazar el ángulo α en posición normal (figura 11.4-1), y determinar los valores de r y α resolviendo el triángulo rectángulo cuyos catetos se conocen. De esa manera, se encuentra $r = 3.61$ y $\alpha = 123°40'$.

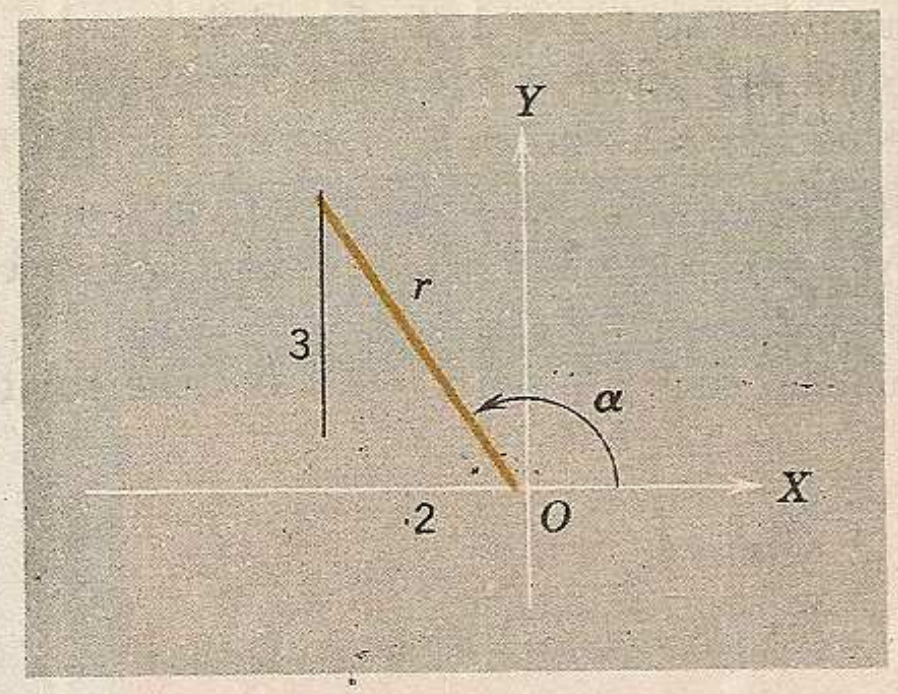


Figura 11.4-1

Entonces

$$\operatorname{sen}(\theta + 123°40') = \frac{1}{3.61} = 0.277,$$

$$\theta + 123°40' = 16°05' \text{ y } 163°55'.$$

En consecuencia,

$$\theta = -107°35' \text{ y } 40°15'.$$

Como θ, de acuerdo con las condiciones dadas, debe ser positivo, resulta $\theta = \mathbf{40°15'}$ y $\mathbf{252°25'}$.

EJERCICIOS 11.4

Resuelva los problemas 1-14 para $0° \leqq \theta < 360°$.

1. $\operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 1.$

2. $-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 1.$

3. $-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 1.$

4. $\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 1.$

5. $13\operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 8.$

6. $-\sqrt{3}\operatorname{sen}\theta + 13\cos\theta = 5.$

7. $3\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta = 5.$

8. $5\operatorname{sen}\theta - 12\cos\theta = 13.$

9. $7\operatorname{sen}\theta + 15\cos\theta = 12.$

10. $8\operatorname{sen}\theta - 5\cos\theta = -2.$

11. $-5\operatorname{sen}\theta + 3\cos\theta = 4.$

12. $-6\operatorname{sen}\theta + 10\cos\theta = -7.$

13. $-2.86\operatorname{sen}\theta + 4.13\cos\theta = 1.68.$

14. $0.956\operatorname{sen}\theta + 1.17\cos\theta = 1.21.$

Resuelva los problemas 15-20 para $0 \leqq u < 2\pi$.

15. $2\operatorname{sen}u - 2\cos u = \sqrt{2}.$

16. $\sqrt{3}\operatorname{sen}u + \cos u = \sqrt{2}.$

17. $\operatorname{sen}u + \sqrt{3}\cos u = -1.$

18. $2\operatorname{sen}u - 5\cos u = 2.$

19. $3\cos u - 8\operatorname{sen}u = -3.$

20. $15\operatorname{sen}u - 4\cos u = 4.$

21. ¿Puede resolverse la ecuación 11.4-1 por el método de esta sección si $c > \sqrt{a^2 + b^2}$? ¿Por qué?

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 11.

1. Diga qué es una ecuación trigonométrica y en qué difiere de una identidad trigonométrica.

2. Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}^2 u = 1,\ 0 \leqq u < 2\pi$.

3. Resuelva la ecuación $\operatorname{sen}^2 \theta - 4 \operatorname{sen} \theta + 3 = 0,\ 0° \leqq \theta < 360°$.

4. Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} 2u \cos u - \operatorname{sen} u = 0,\ 0 \leqq u < 2\pi$.

5. Resuelva la ecuación $\sqrt{3} \operatorname{sen} u + \cos u = 1,\ 0 \leqq u < 2\pi$.

6. Muestre que si $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b$ y $\cos a = \cos b$, entonces $a = b + 2k\pi$, donde k es entero.

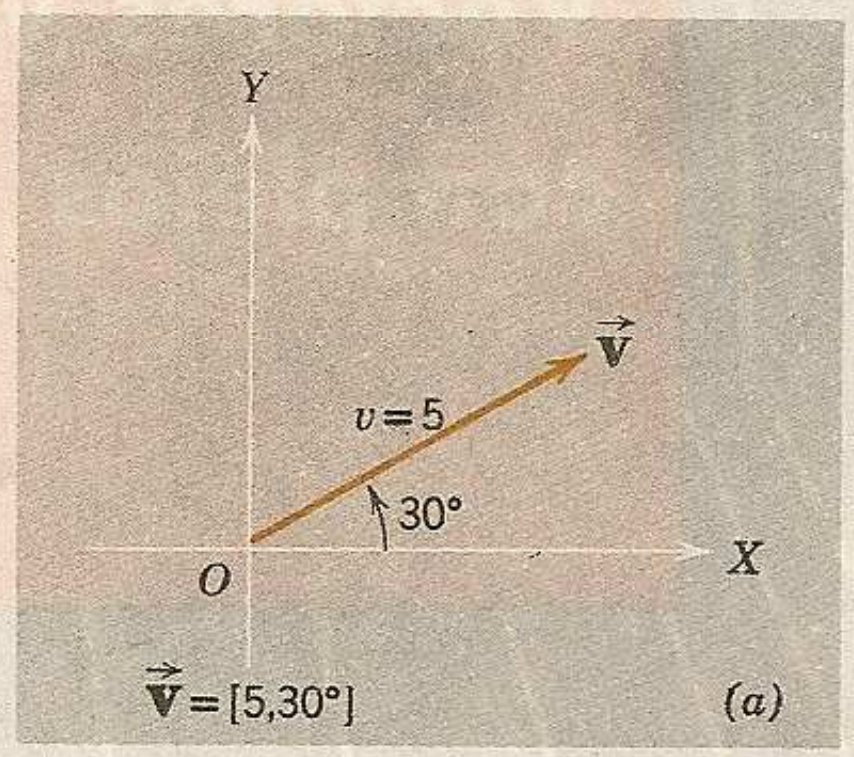
7. Diga si la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 6 = 0$ tiene solución y por qué.

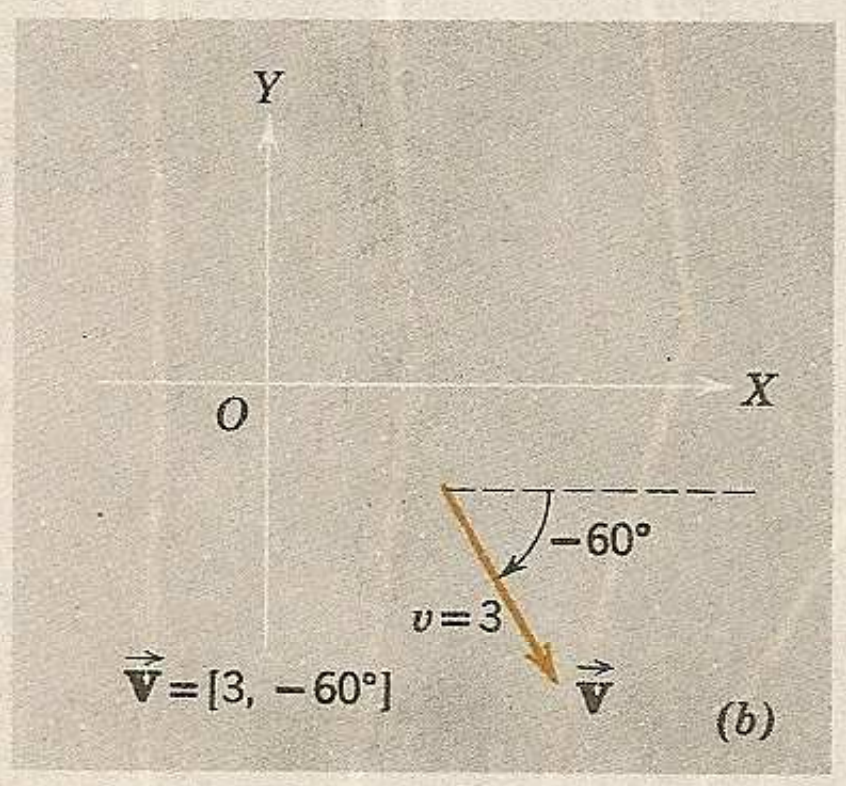
CAPITULO 12

Vectores y números complejos

12.1. VECTORES

En la Sec., 3.5 se estableció que, geométricamente, un vector puede representarse por un segmento de recta que tiene *magnitud, dirección* y *sentido*. La magnitud está representada por la longitud del segmento de recta, la dirección es la de la recta que la contiene y el sentido se indica por una flecha en uno de los extremos. En este capítulo se estudiarán someramente algunas de las propiedades de los vectores coplanares, es decir, de vectores contenidos en el mismo plano.





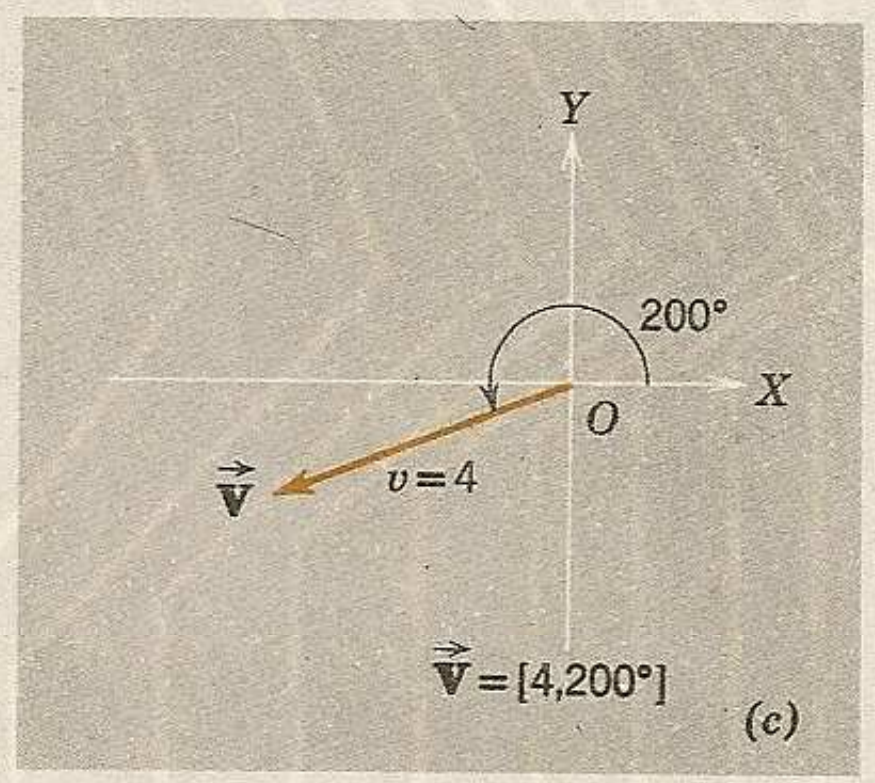


Figura 12.1-1

En este libro los vectores se representarán dibujando una flecha sobre una letra; así $\vec{\mathbf{V}}$ denota un vector y se lee **"el vector V"**. Como un vector está determinado por su magnitud y su orientación, se puede representar por una longitud y un ángulo. El símbolo $[v, \theta]$ va a denotar la forma *polar* de un vector, en donde v representa la *longitud* y θ la *orientación*; v se considera siempre positiva y θ es el ángulo medido a partir de la parte positiva del eje X. En la figura 12.1-1 se muestran algunos vectores.

Considere el segmento dirigido AB, (figura 12.1-2); por A y B baje perpendiculares a la recta L y designe por M y N los puntos de intersección.

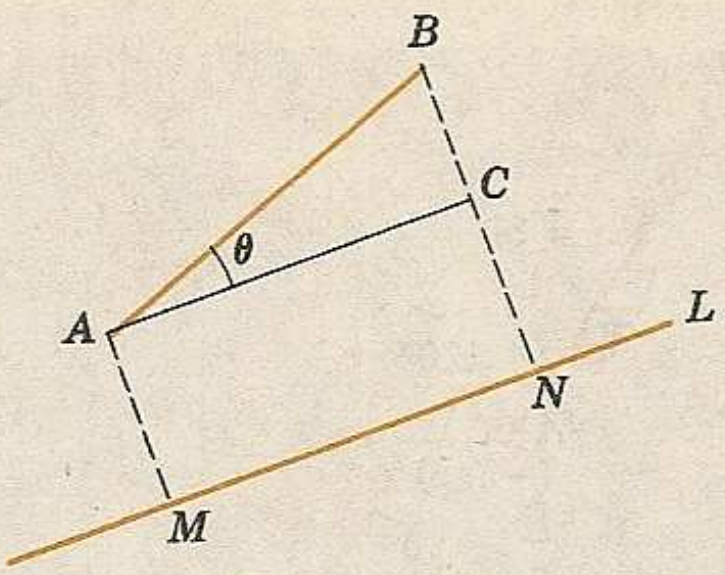


Figura 12.1-2

El segmento dirigido, MN, se llama *proyección del segmento AB sobre L* y lo vamos a representar simbólicamente por $\mathbf{proy}_L AB$; su magnitud (con signo) está dada por $AB\cos\theta$, donde θ es el ángulo formado por el sentido positivo de L (o de una línea paralela a L) y AB.

Es decir,

$$\mathbf{proy}_L AB = AB\cos\theta.$$

Las proyecciones de $\vec{\mathbf{V}}$ sobre los ejes X, Y, son las *componentes vectoriales* del vector y se representan por $\vec{\mathbf{V}}_x$ y $\vec{\mathbf{V}}_y$. Los *números* v_x y v_y son las *componentes escalares* de $\vec{\mathbf{V}}$ y su valor está dado por

$$v_x = v\cos\theta, \tag{12.1-1}$$

$$v_y = v\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{12.1-2}$$

, $\mathrm{v} = |\vec{\mathrm{V}}|$.

Con referencia a la figura 12.1-3, A es el *punto inicial* u **origen** y B el *punto terminal* o **extremo** de $\overrightarrow{AB}$.

Si v_x y v_y son conocidos, el vector $\vec{\mathbf{V}}$ se determina fácilmente resolviendo un triángulo rectángulo. Otra forma de representar un vector es $\vec{\mathbf{V}} = [v_x, v_y]$, que recibe el nombre de **notación matricial**; conviene

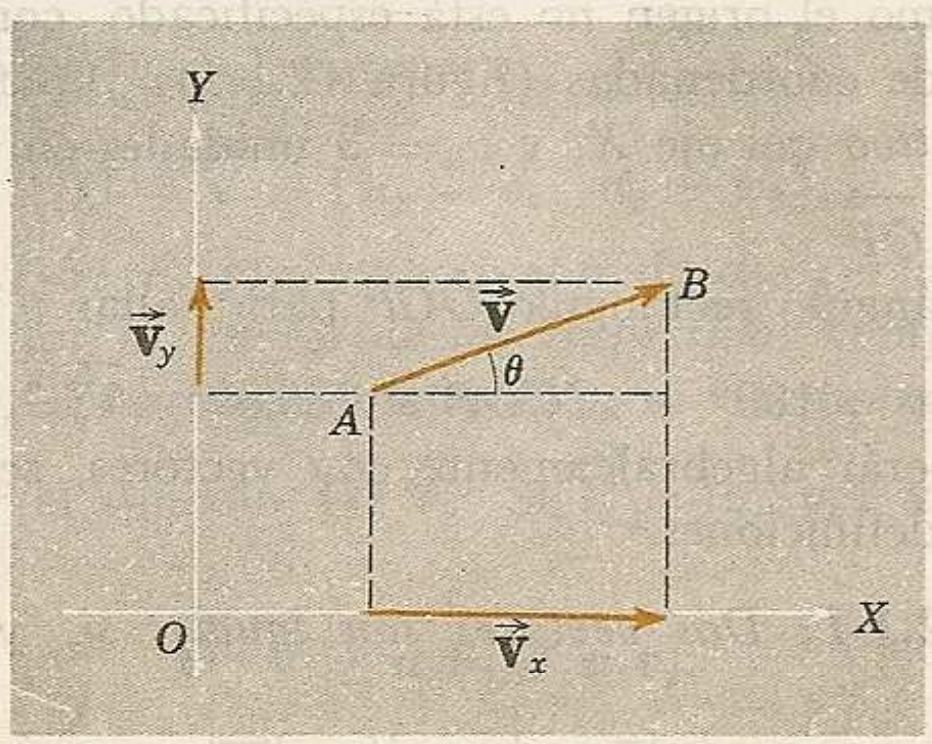


Figura 12.1-3

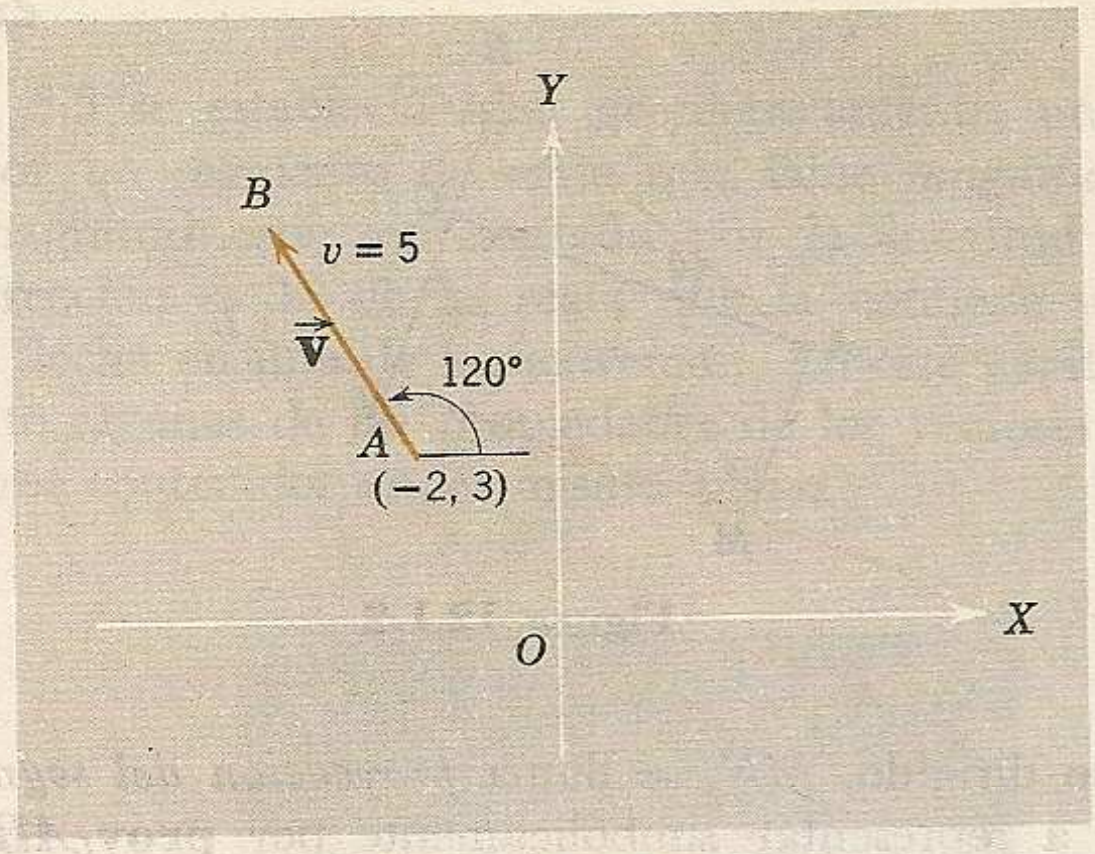


Figura 12.1-4

observar que un par ordenado entre *paréntesis rectangulares* o *corchetes*, va a representar un **vector,** mientras que entre *paréntesis circulares* va a representar un **punto.** El estudiante debe procurar no confundir estos dos símbolos.

Ejemplo 1. Trace $\vec{\mathbf{V}} = [5, 120°]$ con origen en $(-2, 3)$ y escríbalo en notación matricial.

Solución: El vector se muestra en la figura 12.1-4.

$$v_x = 5 \cos 120° = -5 \cos 60° = -\frac{5}{2},$$

$$v_y = 5 \operatorname{sen} 120° = 5 \operatorname{sen} 60° = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces,

$$\vec{\mathbf{V}} = \left[-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right].$$

Ejemplo 2. Trace $\vec{\mathbf{V}} = [-2, -3]$ y escríbalo en forma polar.

Solución: Como el origen no está especificado, considere que coincide con el origen de coordenadas (figura 12.1-5). Trace $v_x = 2$ unidades en el *sentido negativo* del eje X, y $v_y = 3$ unidades en el *sentido negativo* del eje Y. Trace $\overrightarrow{OP}$.

Resuelva el triángulo rectángulo OCP para hallar $v = 3.6$ y $\measuredangle COP = 56.3°$; de donde, $\theta = 180° + \measuredangle COP = 236.3°$ y $\vec{\mathbf{V}} = [\mathbf{3.6, 236.3°}]$.

Para poder operar algebraicamente con vectores, se requiere dar primero de algunas definiciones.[1]

Definición 12.1-1: *Dos vectores son iguales si, y solamente si, sus*

[1] Estas definiciones son una condensación de las propiedades algebraicas de los vectores, tratadas ya en libros sobre vectores.

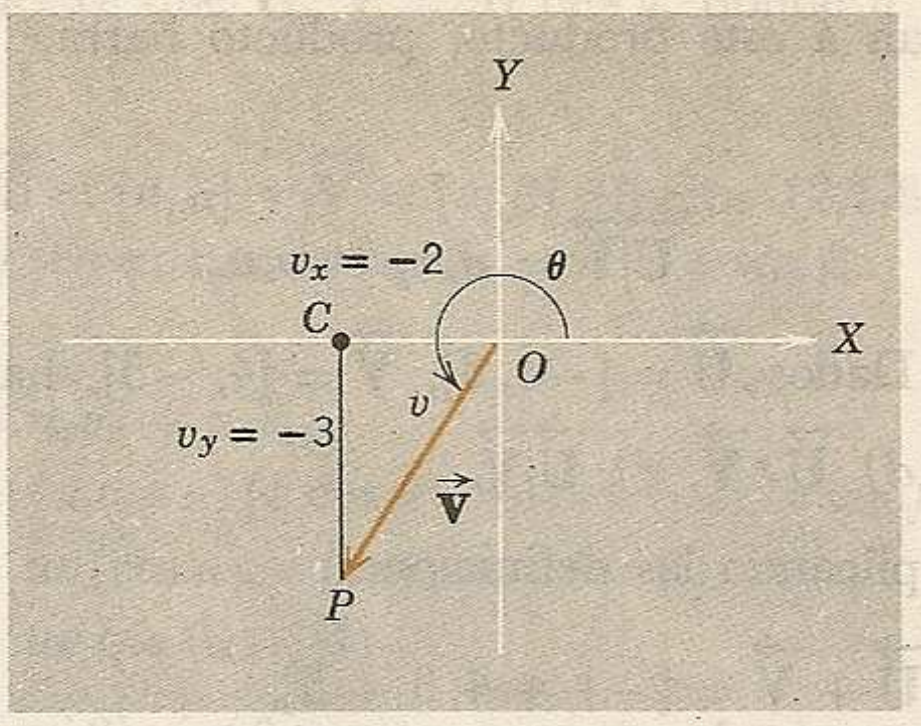


Figura 12.1-5

componentes escalares son iguales. Esto es, dados $\vec{\mathbf{U}} = [u_x, u_y]$ y $\vec{\mathbf{V}} = [v_x, v_y]$, $\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{V}}$, si, y solamente si, $u_x = v_x$ y $u_y = v_y$.

Definición 12.1-2: *La suma de dos vectores es otro vector cuyas componentes escalares son iguales a la suma de las respectivas componentes escalares de los dos vectores.* Así, si $\vec{\mathbf{U}} = [u_x, u_y]$ y $\vec{\mathbf{V}} = [v_x, v_y]$, entonces

$$\vec{\mathbf{U}} + \vec{\mathbf{V}} = [\boldsymbol{u_x + v_y},\ \boldsymbol{u_y + v_x}].$$

Definición 12.1-3: *El producto de una constante por un vector es otro vector cuyas componentes escalares están multiplicadas por la constante.*

Si $\vec{\mathbf{V}} = [v_x, v_y]$ y k es una constante, entonces

$$\boldsymbol{k\vec{\mathbf{V}} = k\,[v_x, v_y] = [kv_x, kv_y]}.$$

Definición 12.1-4: *La diferencia de dos vectores es otro vector cuyas componentes escalares son iguales a la diferencia de las respectivas componentes escalares de los dos vectores.* Así, si

$\vec{\mathbf{U}} = [u_x, u_y]$ y $\vec{\mathbf{V}} = [v_x, v_y]$, entonces

$$\vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{V}} = [\boldsymbol{u_x - v_x},\ \boldsymbol{u_y - v_y}].$$

Definición 12.1-5: *El producto escalar de dos vectores es un número igual a la suma de los productos de las respectivas componentes escalares de los dos vectores.* Este producto también se denomina producto punto y se representa por el símbolo $\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}}$. Si $\vec{\mathbf{U}} = [u_x, u_y)$ y $\vec{\mathbf{V}} = [v_x, v_y]$, entonces

$$\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}} = \boldsymbol{u_x v_x + u_y v_y}.$$

Definición 12.1-6: Si $\vec{\mathbf{U}} = [u_x, u_y]$ y $\vec{\mathbf{V}} = [v_x, v_y]$, entonces *el pro-*

ducto alterno de dos vectores es un número igual a $u_x v_y - v_x u_y$. Algunos autores denominan a este producto, producto barra,[2] y se representa por el símbolo $\vec{\mathbf{U}}|\vec{\mathbf{V}}$.
Así,

$$\vec{\mathbf{U}}|\vec{\mathbf{V}} = u_x v_y - v_x u_y.$$

Ejemplo 3. Dados $\vec{\mathbf{U}} = [-1, 3]$, $\vec{\mathbf{V}} = [4, -5]$, halle: *a)* $\vec{\mathbf{U}} + \vec{\mathbf{V}}$, *b)* $7\vec{\mathbf{U}}$, *c)* $\vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{V}}$, *d)* $\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}}$, *e)* $\vec{\mathbf{U}}|\vec{\mathbf{V}}$.

Solución: Aplicando las definiciones:

a) $\vec{\mathbf{U}} + \vec{\mathbf{V}} = [-1 + 4, 3 - 5]$,

$\vec{\mathbf{U}} + \vec{\mathbf{V}} = \mathbf{[3, -2]}$.

b) $7\vec{\mathbf{U}} = 7[-1, 3]$,

$7\vec{\mathbf{U}} = \mathbf{[-7, 21]}$.

c) $\vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{V}} = [-1 - 4, 3 - (-5)]$,

$\vec{\mathbf{U}} - \vec{\mathbf{V}} = \mathbf{[-5, 8]}$.

d) $\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}} = (-1)(4) + (3)(-5)$,

$\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}} = -4 - 15$,

$\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}} = \mathbf{-19}$.

e) $\vec{\mathbf{U}}|\vec{\mathbf{V}} = (-1)(-5) - (3)(4)$,

$\vec{\mathbf{U}}|\vec{\mathbf{V}} = 5 - 12$,

$\vec{\mathbf{U}}|\vec{\mathbf{V}} = \mathbf{-7}$.

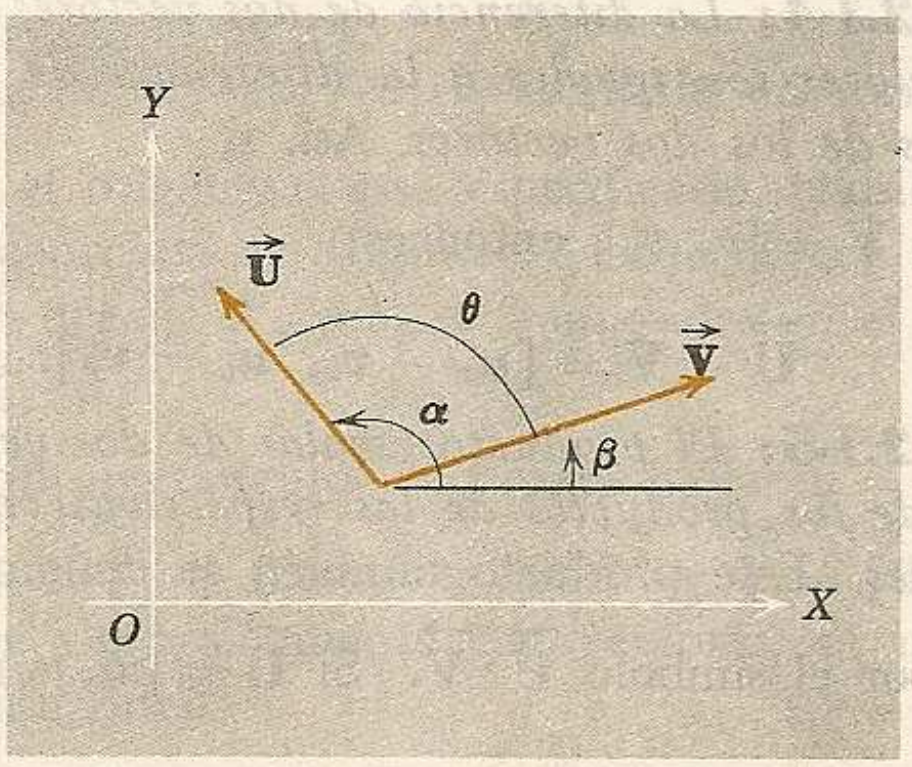


Figura 12.1-6

[2] Vea el libro de W. K. Morrill, *Analytic Geometry*, editado por International Textbook Co.

Ejemplo 4. Muestre que $\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}} = uv \cos\theta$, donde θ es el ángulo que forman $\vec{\mathbf{U}}$ y $\vec{\mathbf{V}}$.

Solución: Sea $\vec{\mathbf{U}} = [u, \alpha]$ y $\vec{\mathbf{V}} = [v, \beta]$ (figura 12.1-6), de modo que $u_x = u\cos\alpha$; $u_y = u \operatorname{sen}\alpha$; $v_x = v\cos\beta$, y $v_y = v \operatorname{sen}\beta$.
Entonces

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}} &= u_x v_x + u_y v_y, \\ &= (u\cos\alpha)(v\cos\beta) + (u\operatorname{sen}\alpha)(v\operatorname{sen}\beta), \\ &= uv(\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta), \\ &= uv\cos(\alpha - \beta).\end{aligned}$$

Pero, puesto que $(\alpha - \beta)$ ó $(\beta - \alpha)$ es igual a θ, el resultado sigue:

$$\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}} = uv\cos\theta.$$

Una consecuencia inmediata de este ejemplo 4, es que si $\vec{\mathbf{U}} \perp \vec{\mathbf{V}}$, entonces $\cos\theta = 0$ y $\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$. Esto es, cuando dos vectores son *perpendiculares* entre sí, su producto escalar es nulo. La proposición recíproca es válida cuando los vectores son diferentes de cero, esto es, si el producto escalar de dos vectores diferentes de cero es nulo, entonces, los dos vectores son perpendiculares entre sí.

EJERCICIOS 12.1

1. Escriba cada uno de los vectores siguientes en notación matricial y dibújelo.

a) [5, 60°]. *b)* [3, 90°]. *c)* [3, 270°].
d) [10, 220°]. *e)* [2, 330°]. *f)* [4, 400°].

2. Escriba cada uno de los vectores siguientes en forma polar y dibújelo.

a) [5, 0]. *b)* [3, 4]. *c)* [8, −15].
d) [7, −24]. *e)* [1, −2]. *f)* [13.2, −12.1].
g) [42.1, −26.3]. *h)* [−10.3, −14.2]. *i)* [−3.27, 12.6].

3. Demuestre que, en general, si $\vec{\mathbf{V}} = [v_x, v_y] = [v, \theta]$,

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \text{ y } \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}.$$

4. Un *vector unitario* es aquel cuya magnitud es **uno.** Use la definición 12.1-3 y el problema 3 para mostrar que un vector unitario, paralelo y del mismo sentido que $\vec{\mathbf{V}} = [v_x, v_y]$, puede ser expresado como

$$\left[\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}\right].$$

Halle el vector unitario de cada uno de los siguientes vectores, o sea un vector de magnitud *uno*, paralelo y del mismo sentido que el vector dado.

a) [3, 4]; *b)* [5, −12]; *c)* [−15, −8]; *d)* [1, 1].

5. Efectúe las operaciones indicadas y exprese la respuesta como un vector en notación matricial.

a) $[3, 3] + [-3, 5]$.
b) $5[2, -2]$.
c) $[-5, -3] - [0, 5]$.
d) $5[6, -8] - 2[-2, 3]$.
e) $3[2, -2] + [2, 60°]$.
f) $[-1, -1] + 2[1, 60°]$.
g) $8[2.5, -3.2] - 2[4, 90°]$.
h) $[3, 110°] - 2[5, 40°] + 3[-2, -7]$.

6. Muestre que dos vectores $\vec{\mathbf{U}}$ y $\vec{\mathbf{V}}$ pueden sumarse geométricamente colocando el origen del segundo en el extremo del primero y uniendo el origen del primero con el extremo del segundo. Muestre también que $\vec{\mathbf{U}} + \vec{\mathbf{V}}$ es la diagonal de un paralelogramo con $\vec{\mathbf{U}}$ y $\vec{\mathbf{V}}$ como lados adyacentes. (*Sugestión:* Sea $\vec{\mathbf{W}} = \vec{\mathbf{U}} + \vec{\mathbf{V}}$. Muestre que $w_x = u_x + v_x$ y $w_y = u_y + v_y$).

7. Use el resultado del problema anterior para demostrar que en todo triángulo ABC, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$. (Compare este resultado con el Teorema 1.2-2).

8. Halle el producto escalar de cada uno de los siguientes pares de vectores:

a) $[2, 3], [5, -2]$.
b) $[12, -5], [-24, 7]$.
c) $[3, 60°], [2, 300°]$.
d) $[6, 270°], [3, 180°]$.
e) $[1, -3], [2, 45°]$.
f) $[5, 110°], [-3, -1]$.
g) $[4, -2], [-1, -2]$.
h) $[5, 70°], [3, -50°]$.

9. Muestre que $\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{U}} = u^2$. (*Sugestión:* Sea $\vec{\mathbf{U}} = [u_x, u_y]$; use el problema 3.

10. Halle el producto alterno de los vectores del problema 8.

11. Muestre que los siguientes pares de vectores, son perpendiculares.

a) $[1, 2], [-2, 1]$.
b) $[-4, 5], [5, 4]$.
c) $[4, 3], [6, -8]$.
d) $[a, b], [b, -a]$.

12. Use el resultado del ejemplo 4 para hallar el ángulo que forman cada uno de los siguientes pares de vectores.:

a) $[1, \sqrt{3}], [\sqrt{3}, 1]$.
b) $[3, -4], [12, 5]$.
c) $[6, -1], [4, -5]$.
d) $[1, 8], [-12, -5]$.

13. Un aeroplano sigue un derrotero de 200° con una velocidad, respecto al aire, de 300 kph. Si el viento sopla del sureste a 20 kph, halle el verdadero derrotero del avión y su velocidad respecto al suelo. (*Sugestión:* Halle la suma vectorial de la velocidad del avión respecto al aire y la velocidad del aire).

14. En Física se muestra que la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo, es la suma vectorial (o geométrica) de todas las fuerzas aplicadas en el cuerpo. Halle las resultantes de las fuerzas aplicadas en cada uno de los cuerpos que aparecen en la figura 12.1-7.

15. El producto alterno de dos vectores puede expresarse como $\vec{\mathbf{U}}|\vec{\mathbf{V}} = uv \operatorname{sen}\theta$, donde θ es el ángulo entre ellos, medido en sentido levógiro de $\vec{\mathbf{U}}$ a $\vec{\mathbf{V}}$. Muestre que el aserto anterior es cierto. (*Sugestión:* Haga $\vec{\mathbf{U}} = [u, \alpha]$, $\vec{\mathbf{V}} = [v, \beta]$ y aplique la definición de producto alterno).

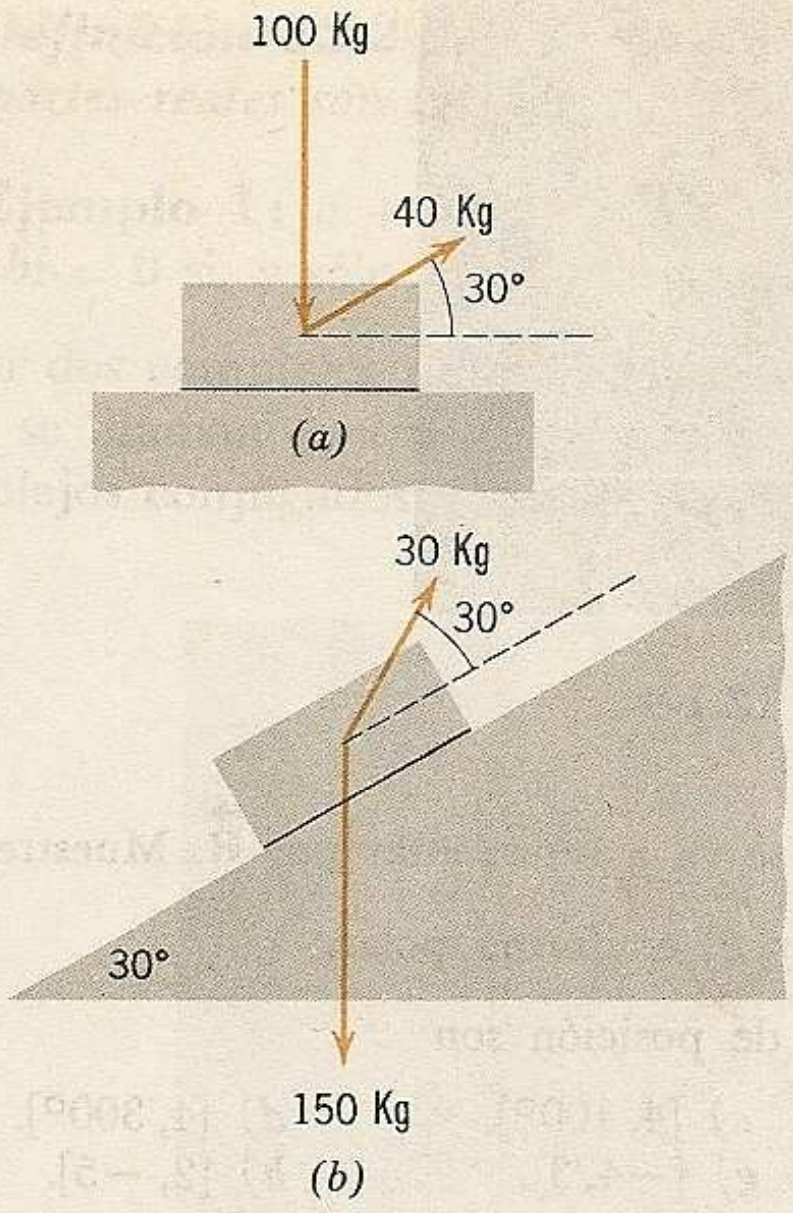


Figura 12.1-7

16. Muestre que el área de un triángulo formado por los vectores $\vec{\mathbf{U}}$ y $\vec{\mathbf{V}}$ como lados adyacentes (figura 12.1-8), está dada por $A = \frac{1}{2}|\vec{\mathbf{U}}|\vec{\mathbf{V}}|$, ó $A = \frac{1}{2}|uv \text{ sen } \theta|$ (vea el problema 15).

17. Use el resultado del problema anterior para hallar el área del triángulo formado por los siguientes pares de vectores, como lados adyacentes.

a) $[2, -3], [4, 5]$.
b) $[-24, 7], [12, -5]$.
c) $[15, 15], [-2, 3]$.
d) $[-5, -4], [-8, 11]$.

18. Use el producto alterno de 2 vectores y el problema 16 para demostrar la ley de los senos. (*Sugestión:* represente cada lado del triángulo por un vector, aplique $A = \frac{1}{2}\vec{\mathbf{U}}|\vec{\mathbf{V}}$ tres veces e iguale los resultados. Diga por qué puede hacer esto. Note que $A > 0$ si $0° \leqq \theta \leqq 180°$).

19. Use el producto escalar de 2 vectores $\vec{\mathbf{U}} \cdot \vec{\mathbf{V}} = uv \cos\theta$ para establecer la ley de los cosenos. (*Sugestión:* Por el problema 7, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; eleve al cuadrado ambos miembros como se indicó en el problema 9 y use la relación $(\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{C} - \vec{D}) = \vec{A} \cdot \vec{C} - \vec{A} \cdot \vec{D} - \vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{D}$).

20. Todo punto $P(x, y)$ de un plano se puede considerar como el extremo de un vector cuyo origen es el de coordenadas (figura 12.1-9); dicho vector se

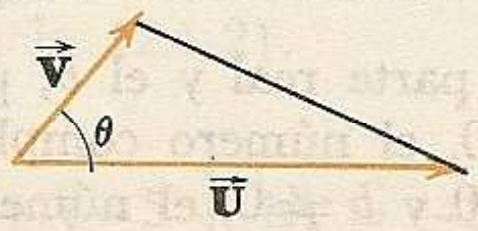


Figura 12.1-8

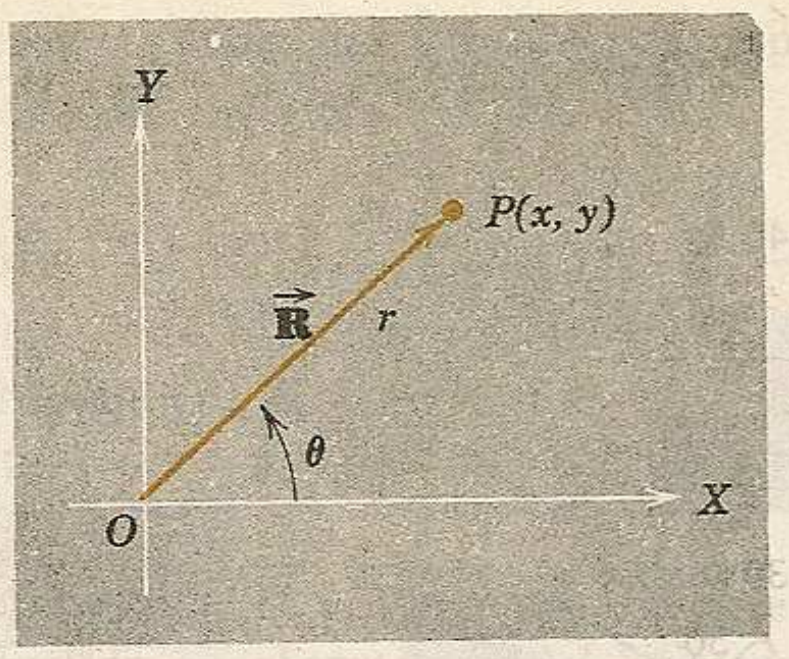


Figura 12.1-9

llama **vector de posición** del punto P y se va a representar por $\vec{\mathbf{R}}$. Muestre que $\vec{\mathbf{R}} = [x, y]$ en notación matricial, ó $\vec{\mathbf{R}} = [r, \theta]$ en forma polar.

Construya los puntos cuyos vectores de posición son

a) $[3, 60°]$. *b)* $[5, -250°]$. *c)* $[4, 100°]$. *d)* $[4, 300°]$.
e) $[3, 2]$. *f)* $[-2, -1]$. *g)* $[-4, 3]$. *h)* $[2, -5]$.

21. Use el concepto de vector de posición para mostrar que la distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. (*Sugestión:* Use el problema 7 para establecer que $P_1P_2 = \vec{\mathbf{R}}_2 - \vec{\mathbf{R}}_1$).

22. Dados $P_1(x_1, y_1)$ y $P(x, y)$ y un vector $\vec{\mathbf{N}} = [a, b]$, muestre que $ax + by + c = 0$ si $\overrightarrow{P_1P} \perp \vec{\mathbf{N}}$. Esta es la ecuación de una recta que pasa por P_1 y es paralela al vector $[-b, a]$. (*Sugestión:* Use la sugestión del problema 21 y haga $c = -ax_1 - by_1$).

12.2. NUMEROS COMPLEJOS

En el curso de álgebra, el estudiante vio que para que la ecuación $x + 1 = 0$ tenga solución, fue necesario introducir los números negativos, como por ejemplo $x = -1$. Históricamente, cuando se estudió la ecuación $x^2 + 1 = 0$, se halló que no admitía solución real, porque el cuadrado de un número real es siempre positivo o nulo. Para soslayar ese obstáculo, se introdujo el símbolo $\sqrt{-1}$, con la propiedad de que $(\sqrt{-1})^2 = -1$; dicho símbolo se llama *número imaginario* y se representa por i, o sea que $i = \sqrt{-1}$ e $i^2 = -1$. El número i, a través del tiempo ha llegado a desempeñar un papel muy importante en la ciencia.

Definición 12.2-1: *Una expresión de la forma* $a + bi$, *ó* $a + ib$, *donde* **a** *y* **b** *son reales, se llama número complejo.*

El número a se llama parte real y el b, parte imaginaria del número $a + bi$. Si $a \neq 0$, y $b = 0$, el número complejo $a + 0i$ se identifica con el número real a. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, el número complejo $0 + bi$ se llama *imaginario puro* y se denota por bi.

Definición 12.2-2: *Dos números complejos son iguales si, y sólo si, sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias también lo son.*

Ejemplo 1: $a + bi = c + di$ si $a = c$ y $b = d$. Esto implica que $a + bi = 0$ si, y sólo si, $a = 0$ y $b = 0$.

Si dos complejos difieren solamente en el signo de sus partes imaginarias, se llaman *conjugados*; por ejemplo, $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$ son complejos conjugados. $\bar{z}$ se lee "z barra" ó "z conjugado".

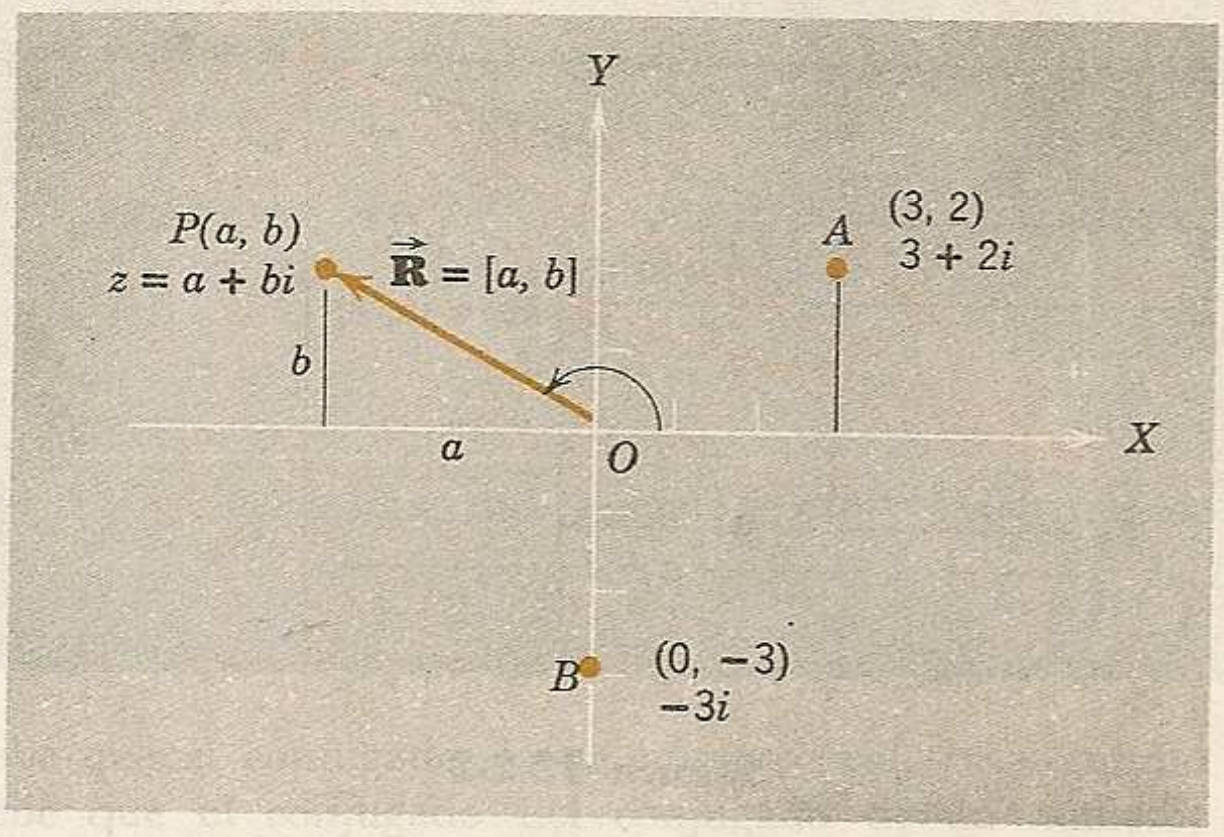


Figura 12.2-1

Los números complejos pueden representarse gráficamente si se asocia el complejo $z = a + bi$ con el punto P de coordenadas (a, b). Al efecto (figura 12.2-1), el eje X se llama *eje real* y el Y, eje *imaginario*; el plano XY es el *plano complejo*. En la figura 12.2-1 los puntos A y B representan, respectivamente, a los números complejos $3 + 2i$ y $-3i$.

Esta representación geométrica conduce a la siguiente observación: A todo número complejo $z = a + bi$ se le puede asociar el *vector de posición* $\vec{\mathbf{R}} = [a, b]$, con origen en el de coordenadas (vea el problêma 12.1-20). La parte real de z es la componente (escalar) X de $\vec{\mathbf{R}}$ y su parte imaginaria, la componente Y.

La forma $a + bi$ se va a llamar *forma común* del número complejo.

Definición 12.2-3: *Si a, b, c y d son reales, la adición de los complejos* $\mathbf{a} + \mathbf{bi}$ y $\mathbf{c} + \mathbf{di}$, *se define como sigue:*

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

(Compare esta definición con la 12.1-2).

Ejemplo 2.

a) $(2 + 3i) + (-5 + 4i) = -3 + 7i.$

b) $(3 - 4i) - (1 - i) = 4 = 3i.$

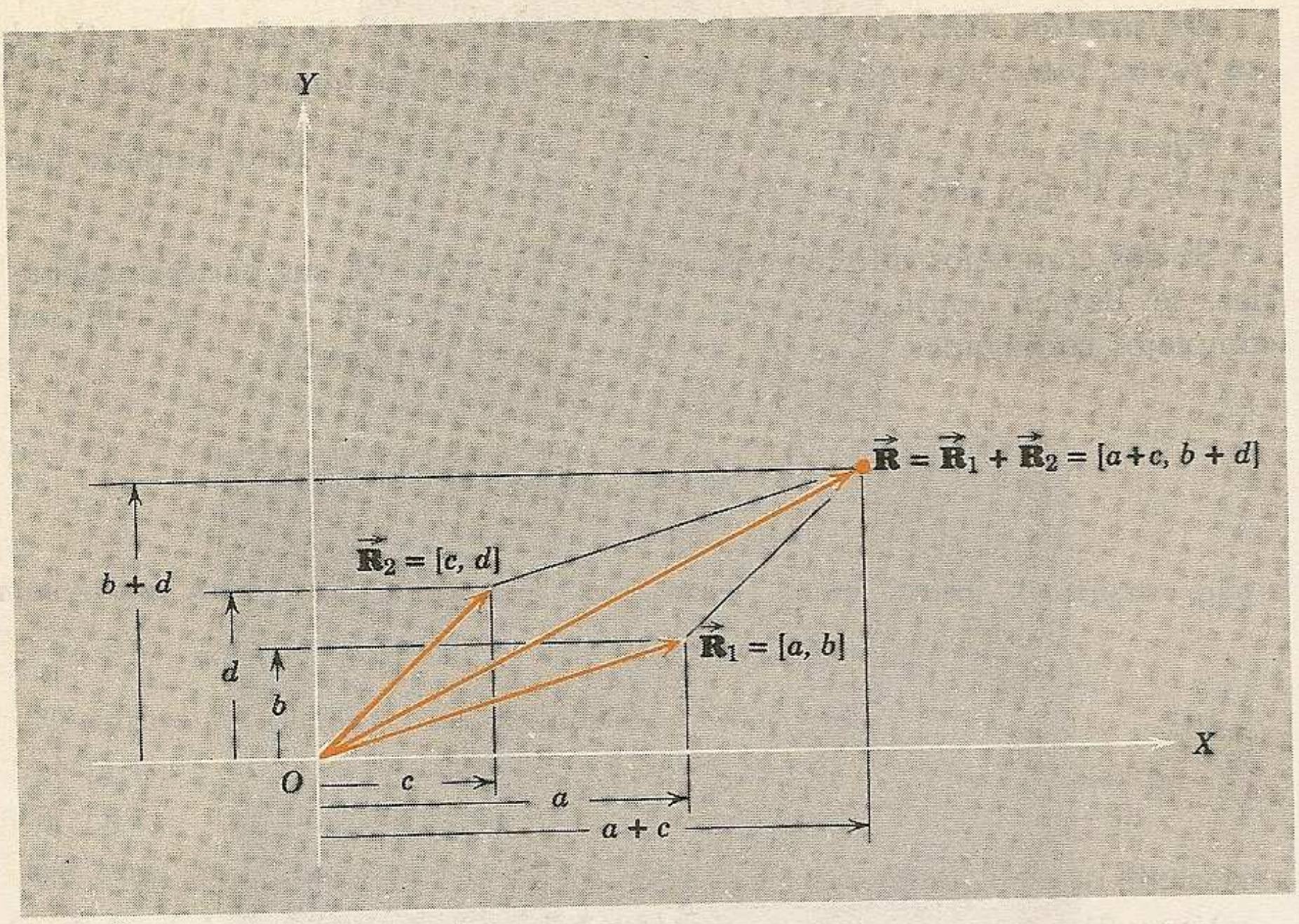


Figura 12.2-2

La adición de números complejos se representa geométricamente así:

Sean $\vec{\mathbf{R}}_1 = [a, b]$ y $\vec{\mathbf{R}}_2 = [c, d]$, los vectores de posición de los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, respectivamente. Forme un paralelogramo con $\vec{\mathbf{R}}_1$ y $\vec{\mathbf{R}}_2$ como lados adyacentes; la figura 12.2-2 muestra que la diagonal (que parte de 0) del paralelogramo, representa la suma* $z_1 + z_2$, porque $\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{R}}_1 + \vec{\mathbf{R}}_2 = [a + c, b + d]$. Así pues, se puede decir que el vector asociado con la suma de dos complejos, es la suma de los vectores asociados a dichos números.

La multiplicación y división de dos números complejos en su forma común, obedece las reglas del álgebra ordinaria, si se reemplaza i^2 por -1. Sin embargo, las operaciones citadas se efectúan más fácilmente cuando se escriben los complejos en su forma polar; éste será el tema del artículo siguiente.

EJERCICIOS 12.2

1. Muestre que $i^3 = -i$, $i^4 = +1$, $i^6 = -1$ y que toda potencia anterior de i puede escribirse en una de las cuatro formas: i, $-i$, 1, -1.

* *Adición* es la operación y *suma* es el resultado.

2. Efectúe las operaciones indicadas y escriba la respuesta en la forma común $a + bi$.

a) $(5 + 2i) + (-1 + 5i)$.
b) $(-4 - 8i) + (7 - 2i)$.
c) $(2 + 4i) + (-5 - 3i) + (6 + 7i)$.
d) $(-8 + i) - (-2 + 3i)$.
e) $(4 - i) - (6 - 3i) - (-1 - i)$.
f) $(5 + 13i)(-2 - 2i)$.
g) $(-3 + i)(i)(1 + 2i)$.
h) $(1 + \sqrt{-4})(5 + \sqrt{-9})$. (*Sugestión:* $\sqrt{-P} = i\sqrt{P}$, para $P > 0$.)
i) $(3 - \sqrt{-7})(-3 + \sqrt{-2})$.
j) $\dfrac{3 + 7i}{2 - 3i}$. *Sugestión:* Multiplique el numerador y el denominador por el conjugado del denominador).
k) $\dfrac{2 - 3i}{1 + 2i}$.
l) $\dfrac{4 - \sqrt{-9}}{2 + \sqrt{-4}}$.
m) $\dfrac{3 - \sqrt{-25}}{\sqrt{-16}}$.

3. Halle x y y de las siguientes ecuaciones; x y y son reales.

a) $3x + 16i = 9 - yi$.
b) $-5 - 17i = x + 3yi$.
c) $(2x + 5) + (-y - 3)i = 0$.
d) $x - 2i + 5 + yi = 0$.

4. Pruebe que el conjugado de un número real, es el mismo número.

5. Pruebe que el conjugado del conjugado de un número, es el número dado.

6. Pruebe que el conjugado de una suma, es la suma de los conjugados de los sumandos.

7. Pruebe que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados de los factores.

8. Usando vectores de posición, efectúe y construya gráficamente las siguientes sumas:

a) $(2 + i) + (-1 + 3i)$.
b) $(-12 - 11i) + (8 + 7i)$.
c) $(2i) + (5i)$.
d) $(10 + 6i) + (-3 - 2i)$.

9. La magnitud de $\vec{\mathbf{R}} = [a, b]$ se llama *módulo* del número complejo $a + bi$. Muestre que dicho módulo es $\sqrt{a^2 + b^2}$.

10. Considere los complejos $z = 3 - 4i$ y $w = 5 + 12i$:

a) Sitúelos en el plano complejo.
b) Halle el módulo de cada uno (problema 9).
c) Use vectores para situar los puntos $w + z$, $w - z$, $2w$ y $-3z$.

11. Si z_1 y z_2 son complejos, muestre que la distancia entre sus puntos asociados, en el plano complejo, está dada por $|z_2 - z_1|$, donde $|z|$ denota el módulo de z. Use vectores y compare con el problema 12.1-21.

12. Sea $\bar{z}$ el conjugado del número complejo z. Muestre que $|z^2| = z\bar{z}$.

13. Interprete $\bar{z}$ geométricamente.

14. Sean $\vec{\mathbf{R}}_1 = [a, b]$ y $\vec{\mathbf{R}}_2 = [c, d]$ los vectores de posición asociados a los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, respectivamente. Muestre que $\vec{\mathbf{R}}_1 \cdot \vec{\mathbf{R}}_2$ es igual a la parte real de $z_1\bar{z}_2$ y halle una relación entre $\vec{\mathbf{R}}_1|\vec{\mathbf{R}}_2$ y $z_1\bar{z}_2$.

12.3. FORMA POLAR DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Las operaciones de multiplicación, elevación a potencias y división de complejos, se efectúan más fácilmente cuando los complejos están escritos en su *forma polar*. La forma polar del vector de posición $\vec{\mathbf{R}}$ es $\vec{\mathbf{R}} = [r, \theta]$, donde $r = |\vec{\mathbf{R}}|$ es la magnitud de $\vec{\mathbf{R}}$ y θ es un ángulo en posición normal (Sec. 1.6). Usando las fórmulas 12.1-1 y 12.1-2 y tomando en cuenta la figura 12.3-1, se puede escribir $\vec{\mathbf{R}}$ en notación matricial como $\vec{\mathbf{R}} = [r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta]$.

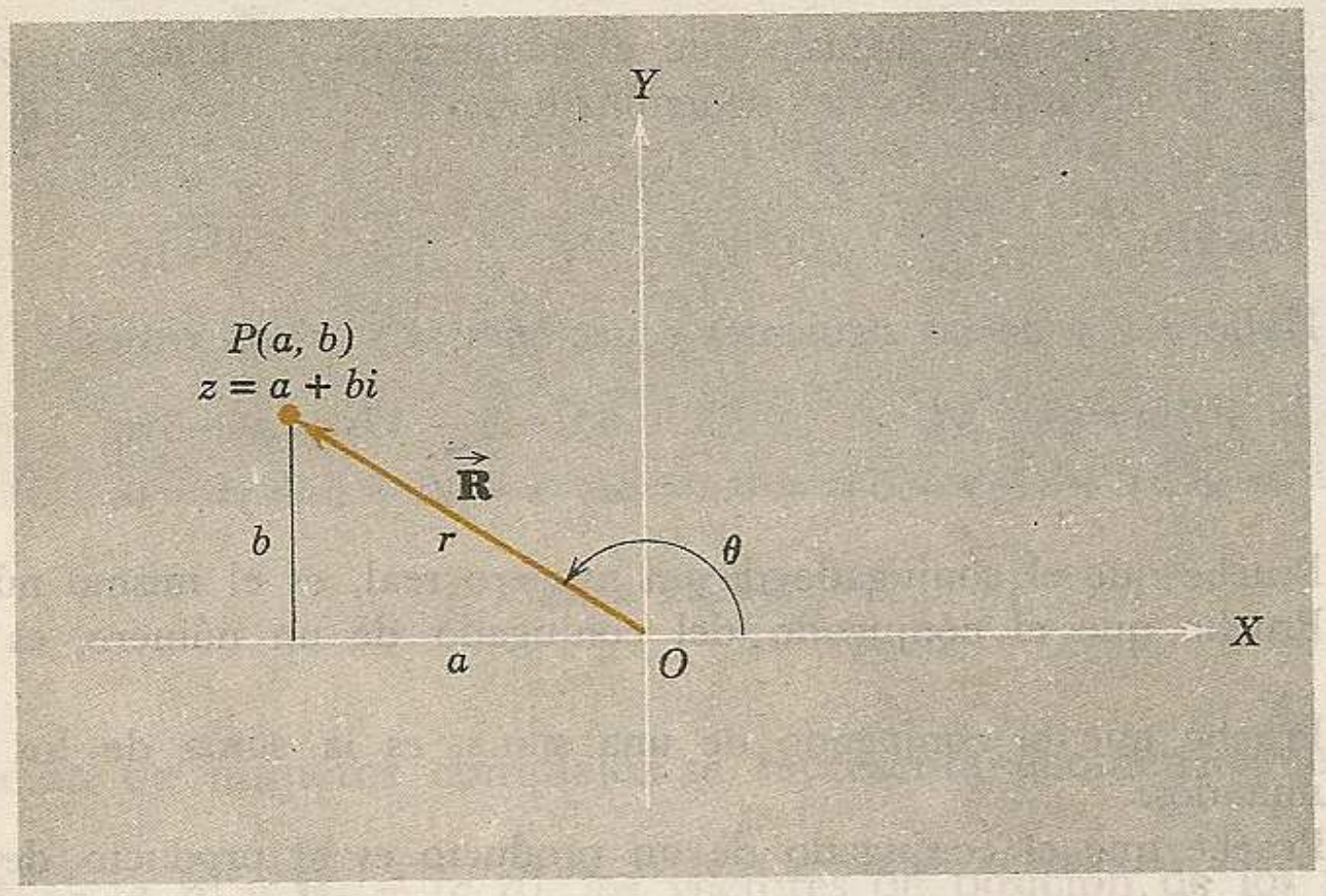


Figura 12.3-1

Definición 12.3-1: *La forma polar del número complejo* $a + bi$ *es el* segundo *miembro de la relación* $\boldsymbol{a + bi} = r \cos \theta + (r \operatorname{sen} \theta) i = \boldsymbol{r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)}$, *donde* r y θ *son lo que se dijo previamente.*

La forma polar de un complejo se abrevia como $r \operatorname{cis} \theta = r (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$; en la abreviatura sólo aparecen las iniciales de *coseno* y *seno*.

El número $\boldsymbol{r}$ de la forma polar es el *módulo* o *valor absoluto* del número complejo y siempre es no-negativo; el ángulo θ se llama *argumento* o *amplitud* del complejo. Los valores $\boldsymbol{r}$ y θ se pueden hallar de las relaciones (figura 12.3-1).

$$\boldsymbol{r = \sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\tan \theta = \frac{b}{a}}. \tag{12.3-1}$$

La amplitud puede ser cualquier ángulo cuyo lado inicial coincide con la parte positiva del eje X y cuyo lado terminal coincide con OP; esto implica, desde luego, que la amplitud no es única. Usualmente se toma $0° \leqq \theta < 360°$. La relación $\tan \theta = b/a$ da dos valores para θ, situados en cuadrantes opuestos; el θ correcto está determinado por los signos de a y b.

Para escribir $a + bi$ *en forma polar*:

1. Sitúe el punto $P(a, b)$, asociado a $a + bi$, en el plano complejo; de hecho, **P** *representa* a **a** + **bi.**
2. Trace el módulo y la ordenada de P.
3. Resuelva el triángulo rectángulo resultante; usualmente esto es más fácil con la regla de cálculo.
4. Halle θ, anotando el cuadrante correcto.

Ejemplo 1. Escriba $-7 + 11i$ en forma polar.

Solución: Construya $P(-7, 11)$ y el triángulo rectángulo, como se muestra en la figura 12.3-2; resolviendo este último se encuentra $\alpha = 57.5°$ y $r = 13$. Como θ está en el CII, $\theta = 122.5°$; entonces

$$-7 + 11i = 13\ (\cos 122.5° + i \operatorname{sen} 122.5°) = 13 \operatorname{cis} 122.5°.$$

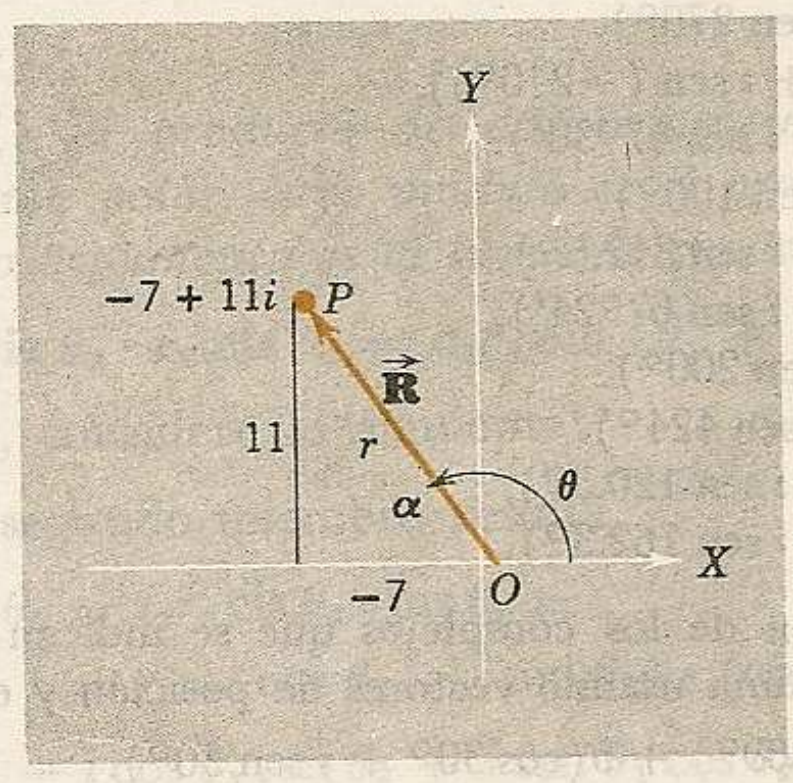


Figura 12.3-2

Para escribir $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ en la forma común, **multiplique** por r ambos sumandos y haga operaciones.

Ejemplo 2. Escriba 3.5 cis 212° en la forma común.

Solución: 3.5 cis 212° = 3.5 (cos 212° + i sen 212°) = **3.5** cos 212° + i(3.5 sen 212°).

$$\mathbf{3.5 \operatorname{cis} 212° = -2.97 - 1.85\, i}$$

La igualdad de dos complejos en forma polar está determinado por el

Teorema 12.3-1: *Dos números complejos en forma polar son iguales si sus módulos son iguales y sus argumentos también lo son o difieren entre sí un múltiplo entero de* 360°.

El estudiante puede demostrar el teorema anterior usando la definición 12.2-2.

EJERCICIOS 12.3

1. Represente los siguientes números complejos con puntos del plano complejo y escríbalos en forma polar.

a) $1 + \sqrt{3}i$. *b)* $\sqrt{3} - i$. *c)* $2 - i$.
d) $-1 + 2i$. *e)* $3i$. *f)* $-7i$.
g) 2. *h)* -10. *i)* $-7 - 7i$.
j) $-8 + 9i$. *k)* $-14.1 + 5.13i$. *l)* $-6.92 + 4i$.
m) $10 + 19.3i$. *n)* $8 - 5i$. *o)* $-2.32 + 1.65i$.

2. Escriba los siguientes complejos en forma común:

a) $7(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.
b) $\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°$.
c) $(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$.
d) $2(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$.
e) $3(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$.
f) $7[\cos(-30°) + i \operatorname{sen}(-30°)]$.
g) $3(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$.
h) $9[\cos(-240°) + i \operatorname{sen}(-240°)]$.
i) $13(\cos 47°30' + i \operatorname{sen} 47°30')$.
j) $3(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$.
k) $13(\cos 312.5° + i \operatorname{sen} 312.5°)$.
l) $18(\cos 67°24' + i \operatorname{sen} 67°24')$.
m) $5(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$.
n) $72(\cos 424° + i \operatorname{sen} 424°)$.
ñ) $56(\cos 120.5° + i \operatorname{sen} 120.5°)$.
p) $15(\cos 162.3° + i \operatorname{sen} 162.3°)$.

3. Efectúe la adición de los complejos que se indican y muestre una interpretación gráfica de la suma usando vectores de posición y el problema 12.2-8.

a) $8(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) + 5(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.
b) $5(\cos 210° + i \operatorname{sen} 210°) + 4(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°)$.

4. Demuestre el Teorema 12.3-1.

5. ¿Cuáles, de los siguientes pares de complejos, son iguales?

a) $z_1 = 3 \operatorname{cis} 30°$, $z_2 = 3 \operatorname{cis} 390°$.
b) $z_1 = 3 \operatorname{cis} 30°$, $z_2 = -3 \operatorname{cis} 30°$.

6. Diga si los siguientes números complejos están en forma polar; en caso contrario, escríbalo en esa forma.

a) $3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 60°)$.
b) $2(\cos 30° - i \operatorname{sen} 30°)$.
c) $2[\cos(-60°) + i \operatorname{sen}(-60°)]$.
d) $(\cos 180° - i \operatorname{sen} 180°)$.

7. Escriba cada uno de los siguientes números complejos en forma común, multiplíquelos y escriba la respuesta en forma polar. De la observación de los resultados, establezca la regla para la multiplicación de complejos en su forma polar.

a) $[2, 0°] \cdot [3, 0°]$.
b) $[2, 0°] \cdot [3, 90°]$.
c) $[2, 90°] \cdot [3, 90°]$.
d) $[2, 45°] \cdot [3, 90°]$.

8. La fórmula de Euler, $e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$, relaciona la base $e = 2.718\ldots$ de los logaritmos naturales con $i = \sqrt{-1}$ y las funciones seno y coseno; la fórmula se demuestra en Cálculo. Muestre que las siguientes relaciones son ciertas.

a) $e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$.

b) $e^{i\pi} = -1$.

c) $\operatorname{sen} x = \dfrac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}$.

d) $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.

e) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

9. Usando la fórmula de Euler del problema 8, demuestre las fórmulas 7.2-6 y 7.3-3. (*Sugestión:* Considere $e^{iu}e^{iv}$ y $e^{i(u+v)}$; aplique la fórmula de Euler a cada una de ambas expresiones, haga operaciones y compare los resultados).

12.4. MULTIPLICACION, POTENCIAS ENTERAS Y DIVISION DE NUMEROS COMPLEJOS

En lo que sigue se hará uso de la notación abreviada $\boldsymbol{r}\ \mathbf{cis}\ \theta$.

Multiplicación

Teorema 12.4-1: *El producto de dos complejos en forma polar es otro complejo en forma polar, cuyo módulo es el producto de los módulos de los factores y cuyo argumento es la suma de sus argumentos:*

$$\boldsymbol{r_1}\ \mathbf{cis}\ \theta_1 \cdot \boldsymbol{r_2}\ \mathbf{cis}\ \theta_2 = \boldsymbol{r_1 r_2}\ \mathbf{cis}\ (\theta_1 + \theta_2).$$

Para demostrarlo, considere lo siguiente:

Desarrollando el segundo miembro resulta

$$r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot r_2 \operatorname{cis} \theta_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot \operatorname{cis} \theta_2 =$$
$$= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2).$$

$$r_1 r_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)$$

que se puede reescribir como sigue:

$$r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i (\cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2)].$$

Aplicando a la expresión anterior las fórmulas de adición apropiadas, se tiene

$$r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot r_2 \operatorname{cis} \theta_2 = r_1 r_2 [\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen} (\theta_1 + \theta_2)]$$

ó

$$\boldsymbol{r_1}\ \mathbf{cis}\ \theta_1 \cdot \boldsymbol{r_2}\ \mathbf{cis}\ \theta_2 = \boldsymbol{r_1 r_2}\ \mathbf{cis}\ (\theta_1 + \theta_2). \tag{12.4-1}$$

Este proceso puede extenderse al producto de cualquier número de complejos; por ejemplo, para tres factores:

$$\boldsymbol{r_1}\ \mathbf{cis}\ \theta_1 \cdot \boldsymbol{r_2}\ \mathbf{cis}\ \theta_2 \cdot \boldsymbol{r_3}\ \mathbf{cis}\ \theta_3 = \boldsymbol{r_1 r_2 r_3}\ \mathbf{cis}\ (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).$$

Ejemplo 1. $3 \operatorname{cis} 15° \cdot 2 \operatorname{cis} 100° = 6 \operatorname{cis} 115°$.

Potencias enteras

Como la potencia entera de un número, es el producto del número por sí mismo, varias veces, se puede enunciar el siguiente, llamado *Teorema de De Moivre*.

Teorema 12.4-2: $(r \operatorname{cis} \theta)^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$, n entero > 0.

Esta relación es cierta para cualquier n real, pero la prueba no se dará aquí.

Ejemplo 2. $(2 \operatorname{cis} 30°)^4 = 2^4 \operatorname{cis} (4 \cdot 30°) = 16 \operatorname{cis} 120°$.

División

Teorema 12.4-3: *El cociente de dos números complejos, dados en su forma polar, es otro número complejo, también en forma polar, cuyo módulo es el módulo del numerador dividido entre el módulo del denominador y cuya amplitud es la amplitud del numerador menos la amplitud del denominador:*

$$\frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2).$$

Demostración. Considere la fracción

$$\frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2}, \quad (r_2 \operatorname{cis} \theta_2 \neq 0).$$

$$\frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} \cdot \frac{r_2 \operatorname{cis} (-\theta_2)}{r_2 \operatorname{cis} (-\theta_2)} = \frac{r_1 r_2 \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2)}{r_2 r_2 \operatorname{cis} 0}.$$

y como $\operatorname{cis} 0 = 1$, se obtiene

$$\frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis} (\theta_1 - \theta_2), \quad (r_2 \operatorname{cis} \theta_2 \neq 0). \tag{12.4-3}$$

Ejemplo 3.

$$\frac{6 \operatorname{cis} 80°}{2 \operatorname{cis} 35°} = 3 \operatorname{cis} 45°.$$

EJERCICIOS 12.4

1. Efectúe las operaciones indicadas.

a) $3 \operatorname{cis} 30° \cdot 4 \operatorname{cis} 20°$.
b) $4 \operatorname{cis} 10° \cdot 7 \operatorname{cis} 110°$.
c) $2 \operatorname{cis} 225° \cdot 8 \operatorname{cis} 180°$.
d) $3 \operatorname{cis} 120° \cdot 2 \operatorname{cis} 15° \cdot 5 \operatorname{cis} 105°$.
e) $(2 \operatorname{cis} 30°)^2$.
f) $(3 \operatorname{cis} 120°)^3$.
g) $(3 \operatorname{cis} 225°)^2$.
h) $(4 \operatorname{cis} 15°)^4$.
i) $\dfrac{8 \operatorname{cis} 140°}{2 \operatorname{cis} 20°}$.
j) $\dfrac{21 \operatorname{cis} 45°}{5 \operatorname{cis} 135°}$.
k) $\dfrac{10 \operatorname{cis} (-30°)}{5 \operatorname{cis} (-150°)}$.
l) $\dfrac{36 \operatorname{cis} 490°}{3 \operatorname{cis} 200°}$.

2. Efectúe las operaciones indicadas haciendo uso de la forma polar. Se recomienda también el uso de la regla de cálculo. Escriba la respuesta en forma polar.

a) $(4 + 3i)(5 + 12i)$.
b) $(15 - 8i)(24 - 7i)$.
c) $(4 + 3i)(-2 - 2i$
d) $(8 + 15i)(3 - 2i)(-2 + 3i)$.
e) $(3 - 2i)^2$.
f) $(-1.732 + i)^3$.
g) $(-4 - 3i)^3$.
h) $(3 - 4i)^4$.
i) $\dfrac{4.6 - 3.5i}{-3.5 + 4.6i}$.
j) $\dfrac{-1 - 3i}{2 + 4i}$.
k) $\dfrac{3 + 2i}{1 - 2i}$.
l) $\dfrac{(7 - 4i)(-2 + 2i)}{8 + 15i}$.

3. Haciendo uso del teorema de De Moivre, obtenga una expresión para $cos\, 2\theta$ y otra para $sen\, 2\theta$, en términos de θ. (*Sugerencia:* Use $(\text{cis}\,\theta)^2 \equiv \text{cis}\, 2\theta$, desarrolle el primer miembro elevando al cuadrado y establezca luego la igualdad entre dos números complejos).

4. Obtenga una expresión para $cos\, 3\theta$ y otra para $sen\, 3\theta$, en términos de θ.

5. Demuestre la identidad $\text{sen}\,\theta \equiv \dfrac{i}{2}[\text{cis}\,(-\theta) - \text{cis}\,\theta]$.

6. Muestre que el efecto de multiplicar un número complejo $z = r\,\text{cis}\,\theta$ por $\text{cis}\,\phi$ (número complejo de módulo uno y amplitud ϕ), es hacer girar el vector de posición asociado a z, un ángulo ϕ (phi).

7. Use el resultado anterior para hacer ver que si el vector $[x, y]$ gira en sentido levógiro un ángulo θ, se obtiene un nuevo vector $[x', y']$, de componentes

$$x' = x\cos\theta - y\,\text{sen}\,\theta \qquad y' = x\,\text{sen}\,\theta + y\cos\theta.$$

(*Sugestión:* Asocie $[x, y]$ con el número complejo $x + iy$).

8. Muestre que los números complejos $\text{cis}\,\theta$ y $\text{cis}\,(-\theta)$ son recíprocos.

9. Muestre que $\text{cis}\,\theta$ y $\text{cis}\,(-\theta)$ son conjugados.

10. Use los problemas 8 y 9 para establecer la condición para que el recíproco de un número complejo sea igual a su conjugado.

11. Interprete geométricamente la multiplicación de complejos, con la fórmula.

$$(r_1\,\text{cis}\,\theta_1)(r_2\,\text{cis}\,\theta_2) = r_1 r_2\,\text{cis}\,(\theta_1 + \theta_2).$$

12. Si z_1 y z_2 son complejos unitarios (de módulo uno), muestre que los puntos del plano complejo que los representan, pertenecen a la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Diga dónde están los puntos z_1z_2, z_2/z_1, z_1^2 y z_1^{-1}.

13. Si $z_1 = \text{cis}\,30°$ y $z_2 = \text{cis}\,60°$, construya los puntos z_1z_2, z_1/z_2, z_1^2 y z_2^{-1}.

12.5. RAICES DE NUMEROS COMPLEJOS

Conviene recordar que la amplitud de un número complejo no es única. Esto es: si un número complejo está representado por $\boldsymbol{r}\,\textbf{cis}\,\theta$, también lo está por $\boldsymbol{r}\,\textbf{cis}\,(\theta + \boldsymbol{n}\cdot 360°)$, siendo $\boldsymbol{n}$ un número entero.

En el ejemplo que sigue se mostrará el procedimiento para hallar las raíces de un número complejo.

Ejemplo. Halle las raíces cúbicas de $\boldsymbol{8i}$.

Solución: Escriba $8i$ en su forma polar $\textbf{8 cis 90°}$, (figura 12.5-1). Suponga que una de las raíces cúbicas está en la forma $\boldsymbol{r}\,\textbf{cis}\,\theta$, en la que van a calcularse los valores de $\boldsymbol{r}$ y θ. Usando la definición de la raíz enésima de un número, esto es, un número que elevado a la potencia n reproduce el número dado, se puede escribir

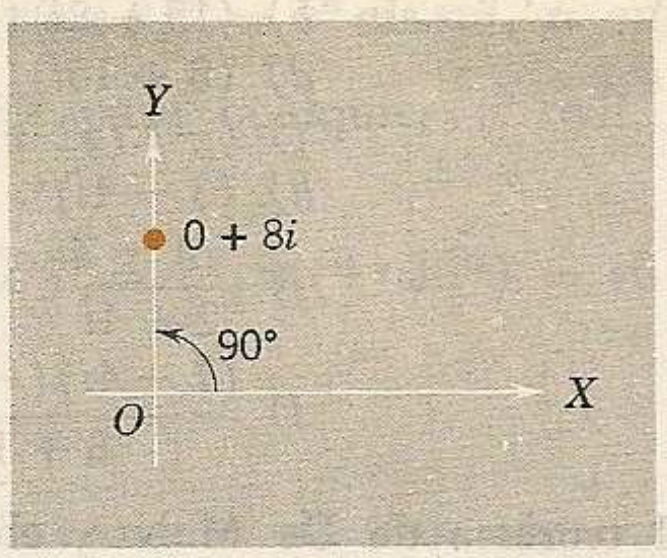


Figura 12.5-1

$$(r \text{ cis } \theta)^3 = 8 \text{ cis } 90°,$$

ó por el teorema de De Moivre,

$$r^3 \text{ cis } 3\theta = 8 \text{ cis } 90°,$$

por lo que aplicando la definición de igualdad de dos números complejos resulta

$r^3 = 8$, y $3\theta = 90° + n \cdot 360°$, en donde n es un número entero.

De esta manera, se obtiene

$$r = 2, \text{ y } \theta = 30° + n \cdot 120°.$$

Dando a n los valores 0, 1, 2, se tiene

$$n = 0, \ \theta = 30°,$$
$$n = 1, \ \theta = 30° + 1 \cdot 120° = 150°,$$
$$n = 2, \ \theta = 30° + 2 \cdot 120° = 270°.$$

Para otros valores enteros de n se encontrarán simplemente ángulos coterminales de estos tres primeros. (Conviene que el estudiante pruebe con otros valores de n). Por lo tanto, existen solamente tres valores distintos de θ y las raíces cúbicas son

$$2 \text{ cis } 30°, \ 2 \text{ cis } 150° \text{ y } 2 \text{ cis } 270°;$$

o bien, en su forma común

$$\sqrt{3} + i, \ -\sqrt{3} + i, \text{ y } -2i.$$

Teorema 12.5-1: *Si r cis α es una raíz emésima de un número complejo R cis $\theta \neq 0$, existen, entonces, exactamente, m raíces distintas de R cis θ.*

Demostración: Si r cis α es una raíz emésima, entonces

$$(r \text{ cis } \alpha)^m = R \text{ cis } \theta.$$

Según el teorema de De Moivre

$$r^m \text{ cis } m\alpha = R \text{ cis } \theta,$$

y de la igualdad de dos números complejos

$$r^m = R, \text{ y } m\alpha = \theta + n \cdot 360°, \ n \text{ entero}$$

o bien,

$$\boldsymbol{r = R^{1/m}} \text{ y } \boldsymbol{\alpha = \frac{\theta}{m} + \frac{n \cdot 360°}{m}}; \ n \text{ entero.}$$

Calculando la raíz real emésima de R se conoce r.

Para calcular α se dan a n diferentes valores enteros: para $\boldsymbol{n = 0}$, $\alpha = \theta/m$, y por lo tanto, una de las raíces es $\boldsymbol{R^{1/m}}$ **cis** $\boldsymbol{\theta/m}$; para $\boldsymbol{n = 1}$, $\boldsymbol{\alpha = \theta/m + 360°/m}$ y otra raíz es $\boldsymbol{R^{1/m}}$ **cis** $(\boldsymbol{\theta/m + 360°/m})$. Las raíces para $n = 0$ y $n = 1$, son dos raíces distintas de R cis θ. Dando a n otros valores enteros desde 2 hasta $m - 1$, se obtendrán otras $m - 2$ raíces distintas de R cis θ.

Por último, si $\boldsymbol{n = m}$, $\alpha = \theta/m + m/360°/m = \theta/m + 360°$; se obtiene la raíz $\boldsymbol{R^{1/m}}$ **cis** $(\boldsymbol{\theta/m + 360°}) = \boldsymbol{R^{1/m}}$ **cis** $\boldsymbol{\theta/m}$, que es la misma raíz hallada para $\boldsymbol{n = 0}$. Existen, por lo tanto, exactamente m raíces emésimas del número complejo R cis θ.

EJERCICIOS 12.5

1. Obtenga las raíces cúbicas de los números complejos siguientes. Escriba las respuestas en la forma polar.

a) 27 cis 60°. *b)* 8 cis 240°. *c)* 64 cis 120°.
d) 125 cis 150°. *e)* 27 cis 300°. *f)* 8 cis 30°.

2. Halle las raíces que se indican. Escriba las respuestas de acuerdo con la forma dada en el problema.

a) Las raíces cúbicas de $-27i$.
b) Las raíces cuadradas de $-3 + 4i$.
c) Las raíces cuadradas de $5 - 12i$.
d) Las raíces cuartas de 16 cis 0°.
e) Las raíces cúbicas de $75 + 100i$.
f) Las raíces cuadradas de 144 cis 65.4°.
g) Las raíces cúbicas de 125 cis 219.4°.
h) Las raíces cuartas de 243 cis 0°.
i) Las raíces cuartas de 1.
j) Las raíces cúbicas de -1.

3. Calcule todas las raíces de las siguientes ecuaciones:

a) $x^5 + 1 = 0$. *b)* $x^3 - 64 = 0$. *c)* $x^4 + 16 = 0$. *d)* $x^3 - 8 = 0$.

4. Por el Teorema 12.5-1 se sabe que un número complejo no nulo R cis θ siempre tiene m raíces emésimas distintas. Muestre que estas m raíces complejas están representadas por m puntos uniformemente distribuidos, ocupando los vértices de un polígono regular de m lados, inscritos en una circunferencia de radio $R^{1/m}$, y ecuación $x^2 + y^2 = (R^{1/m})^2$. Si $\theta = 0$, muestre que cuando menos una de estas raíces, pertenece al eje real.

PROBLEMAS DE REPASO DEL CAPITULO 12.

1. Escriba los siguientes vectores en notación matricial y dibújelos.

a) [2, 135°]. *b)* [3, −120°].

1. Escriba los siguientes vectores en forma polar y dibújelos.

a) $[-3, -3]$. *b)* $[-12, 13]$.

3. Si $\vec{U} = [1, -3]$ y $\vec{V} = [-5, 4]$, halle

a) $\vec{U} + \vec{V}$; *b)* $3\vec{U} - 2\vec{V}$. *c)* $\vec{U} \cdot \vec{V}$;

d) el vector unitario de $\vec{U}$, o sea un vector que multiplicado por el módulo de $\vec{U}$, dé por producto $\vec{U}$.

4. Halle el ángulo entre $\vec{U} = [1\ \sqrt{3}]$ y $\vec{V} = [-2, 2\sqrt{3}]$.

5. Si $\vec{U} \perp \vec{V}$, diga cuánto vale $\vec{U} \cdot \vec{V}$.

6. Escriba $(5 + 3i)$ en forma polar.

7. Halle el producto $(5 + 5\sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i)$ por dos caminos distintos.

8. Halle el valor de $\dfrac{3 \operatorname{cis} 80°}{2 \operatorname{cis} 100°}$.

9. Halle las tres raíces cúbicas de -1.

10. Halle todos los valores distintos de $(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2/3}$.

Apéndice

A.1. EL MILIT

El **mílit** es una unidad de medida angular utilizada por el Ejército en el tiro de artillería. El **mílit** se define como la medida de un ángulo con vértice en el centro de una circunferencia y que intercepta un arco cuya longitud equivale a 1/6400 de la longitud de la circunferencia.

De la definición

$$6400 \text{ mílits} = 360°,$$

y como

$$2\pi \text{ radianes} = 360°,$$

$$6400 \text{ mílits} = 2\pi \text{ radianes},$$

y

$$\mathbf{1 \text{ mílit} = 0.000982 \text{ radianes.}}$$

La longitud de arco **S** de una circunferencia de radio r, está dada por $S = r\theta$, estando θ medido en radianes

Si se usa el mílit como unidad de medida de θ, la fórmula anterior se convierte en

$$S = 0.000982\, r\theta,$$

ó, aproximadamente,

$$S = 0.001\, r\theta,$$

que puede escribirse

$$S = \frac{r\theta}{1000},\ \theta \text{ en mílits.}$$

Esta última fórmula indica que a una distancia de **1000 unidades**, un ángulo de **un mílit** intercepta, aproximadamente, un arco de la unidad de longitud. En este hecho reside la importancia del mílit para cálculos rápidos.

Ejemplo: ¿Cuál es la corrección en deriva que debe aplicarse a un cañón que está tirando a 10,000 m, y tiene un error lateral de 50 m?

Solución: Utilizando la fórmula

$$S = \frac{r}{1000}\theta,$$

se tiene

$$50 = \frac{10\,000}{1000}\theta,$$

o sea

$$\theta = \mathbf{5 \text{ mílits}},$$

EJERCICIOS A.1

1. Demuestre las relaciones siguientes entre grados, radianes y mílits:

a) $90° = \frac{\pi}{2}$ radianes $= 1600$ mílits.
b) $1° = 0.01745$ radianes $= 17.778$ mílits.
c) 1 radian $= 57°17.75' = 1018.6$ mílits.
d) 1 mílit $= 0.05625° = 0.000982$ radianes.

2. Exprese en mílits los siguientes ángulos.

a) 10°. *b)* 25°. *c)* 120°. *d)* 47°26.5′.
e) 1.5 radianes. *f)* 0.6 radianes. *g)* 0.01 radianes. *h)* 3.14 radianes.

3. Convierta a grados y minutos las medidas angulares siguientes.

a) 10 mílits. *b)* 32 mílits. *c)* 100 mílits *d)* 275 mílits.
e) 2000 mílits.

4. Exprese las medidas angulares siguientes, en radianes.

a) 235 mílits. *b)* 520 mílits. *c)* 800 mílits. *d)* 1000 mílits.

5. Una pared situada a 2000 m del punto de observación subtiende un ángulo de 5 mílits. ¿Cuál es la altura de la pared?

6. Halle el largo de un edificio que a una distancia de 5000 m subtiende un ángulo de 10 mílits.

7. Un barco de 100 m de longitud subtiende un ángulo de 15 mílits. ¿A qué distancia se encuentra del observador?

8. Si un cañón tiene un alcance de 20,000 m, y puede girar un ángulo de 2500 mílits, ¿cuál es la longitud de arco que puede mantener bajo fuego?

9. Una batería antiaérea observa que un aeroplano vuela en dirección perpendicular a su línea de fuego a razón de 420 kph. Después de 5 segundos se observa que se ha alejado una distancia subtendida por un ángulo de 500 mílits. ¿A qué distancia se encuentra ahora el aeroplano de la batería?

A.2. LEY DE LAS TANGENTES

La ley de las tangentes es útil para la resolución de triángulos oblicuángulos cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. Para un triángulo ABC, dicha ley se expresa por las fórmulas:

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A - B)}{\tan \frac{1}{2}(A + B)} = \frac{a - b}{a + b},$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(A - C)}{\tan \frac{1}{2}(A + C)} = \frac{a - c}{a + c}, \qquad \text{(A.2-1)}$$

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(B - C)}{\tan \frac{1}{2}(B + C)} = \frac{b - c}{b + c}.$$

La primera de ellas se dedujo en el problema 9.2-6. Las otras dos se pueden deducir de manera análoga.

Al emplear la ley de las tangentes para resolver un triángulo del cual se conocen dos lados, a y b, y el ángulo comprendido, C, es de notarse que las cantidades $a - b$, $a + b$ y $\frac{1}{2}(A + B)$ se pueden calcular fácilmente. La tercera de ellas se halla recordando que en cualquier triángulo $A + B = 180° - C$. La cantidad $\frac{1}{2}(A - B)$ se obtiene de la primera fórmula A.2-1. Los valores de A y B se calculan después, observando que

$$\tfrac{1}{2}(A + B) + \tfrac{1}{2}(A - B) = A \text{ y } \tfrac{1}{2}(A + B) - \tfrac{1}{2}(A - B) = B.$$

Finalmente, aplicando la ley de los senos se calcula c.

Nota: si $b > a$, escriba la ley de las tangentes como

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(B - A)}{\tan \frac{1}{2}(B + A)} = \frac{b - a}{b + a}$$

con lo cual se evita el uso de cantidades negativas.

Ejemplo: Resuelva el triángulo ABC, si $a = 42.32$, $c = 76.40$, y $B = 32°17'$.

Solución: Trace el triángulo como se muestra en la figura A.2-1.

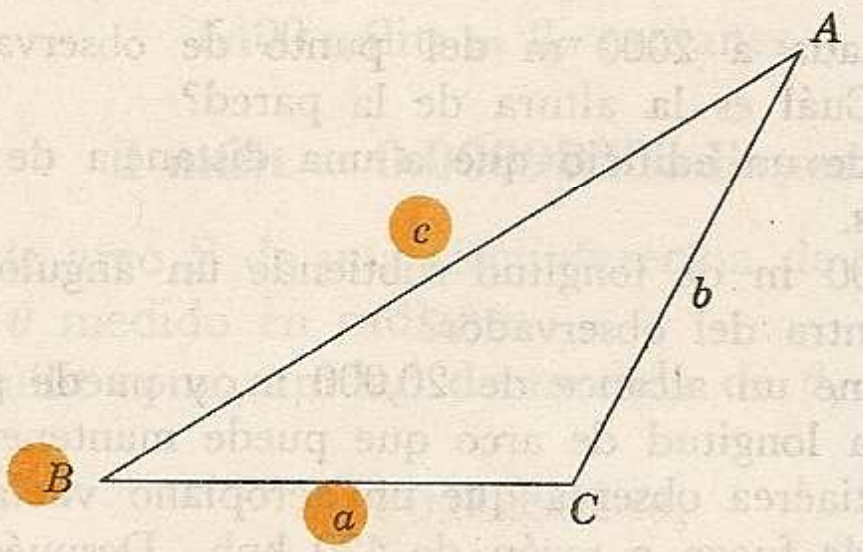


Figura A.2-1

Como $c > a$, las fórmulas adecuadas son:

$$\frac{\tan \frac{1}{2}(C - A)}{\tan \frac{1}{2}(C + A)} = \frac{c - a}{c + a},$$

o sea,

$$\tan \tfrac{1}{2}(C - A) = \frac{c - a}{c + a} \tan \tfrac{1}{2}(C + A),$$

$$C + A = 180° - B;$$

y

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{\operatorname{sen} A},$$

ó

$$b = a \operatorname{sen} B \csc A.$$

Las operaciones con logaritmos son las siguientes:

$\frac{1}{2}(C - A)$ (b)

$c =$ 76.40		$\log a =$ 1.6265
$a =$ 42.32		
$c - a =$ 34.08	$\log (c - a) =$ 1.5325	
$c + a =$ 118.72	$\operatorname{colog} (c + a) =$ 7.9255 − 10	
$B =$ 32°17′		$\log \operatorname{sen} B =$ 9.7276 − 10
$(C + A) =$ 147°43′		
$\frac{1}{2}(C + A) =$ 73°52′	$\log \tan \frac{1}{2}(C + A) =$ 10.5387 − 10	
$\frac{1}{2}(C - A) =$ 44°47′	$\log \tan \frac{1}{2}(C - A) =$ 19.9967 − 20	
		$\log \csc A =$ 10.3133 − 10
		$\log b =$ 21.6674 − 20

$A =$ 29°05′
$C =$ 118°39′
$b =$ 46.49

Comprobación: $A + B + C = 180°01'$. La discrepancia obedece a la interpolación.

A.3. TANGENTES DE ANGULOS MITAD

En el problema 9.4-11 se dedujo la fórmula.

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{1}{(s-a)}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

De manera análoga se pueden deducir las expresiones para tan $(B/2)$ y tan $(C/2)$. Las fórmulas de las tangentes de ángulos mitad, son

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{(s-a)};\quad \tan\frac{B}{2} = \frac{r}{(s-b)};\quad \tan\frac{C}{2} = \frac{r}{(s-c)};$$

donde,

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \text{ y } s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

En el ejemplo siguiente se muestra el uso de estas fórmulas para la resolución de triángulos cuando se conocen sus tres lados.

Ejemplo 1: Resuelva el triángulo ABC, si $a = 46.19$, $b = 71.43$, y $c = 61.42$.

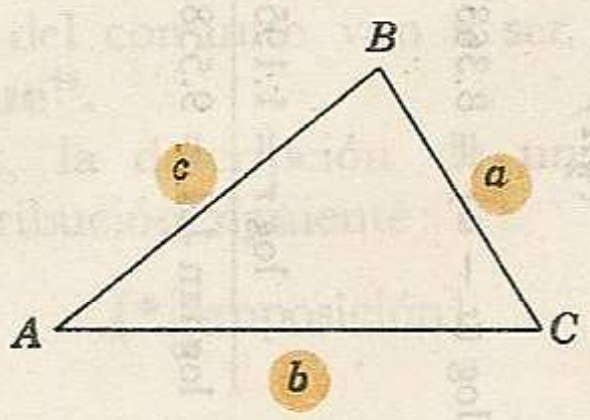


Figura A.3-1

Solución: Trace el triángulo como se muestra en la figura A.3-1, y escriba las fórmulas

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{r}{(s-a)};\quad \tan\frac{B}{2} = \frac{r}{(s-b)};\quad \tan\frac{C}{2} = \frac{r}{(s-c)};$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}};\quad s = \tfrac{1}{2}(a+b+c).$$

Establezca la plantilla logarítmica y efectúe las operaciones numéricas como se muestra a continuación.

A.4. CONJUNTOS

Un **conjunto** puede describirse como una colección de objetos de cualquier clase; todo objeto que pertenece a él, recibe el nombre de *miem-*

Resolución logarítmica del ejemplo de la Sec. A-3.

$a = 46.19$
$b = 71.43$
$c = 61.42$

$2s = 179.04$
$s = 89.52$
$s - a = 43.33$
$s - b = 18.09$
$s - c = 28.10$

(r)

$\operatorname{colog} s = 8.0481 - 10$
$\log (s - a) = 1.6368$
$\log (s - b) = 1.2575$
$\log (s - c) = 1.4487$

$2 \log r = 12.3911 - 10$

$r = 15.69$

$\frac{1}{2}A = 19°54'$
$\frac{1}{2}B = 40°56'$
$\frac{1}{2}C = 29°11'$

$A = 39°48'$
$B = 81°52'$
$C = 58°22'$

($\frac{1}{2}A$)

$\operatorname{colog} (s - a) = 8.3632 - 10$

$\log r = 1.1956$

$\log \tan \frac{1}{2}A = 9.5588 - 10$

($\frac{1}{2}B$)

$\operatorname{colog} (s - b) = 8.7425 - 10$

$\log r = 1.1956$

$\log \tan \frac{1}{2}B = 9.9381 - 10$

($\frac{1}{2}C$)

$\operatorname{colog} (s - c) = 8.5513 - 10$

$\log r = 1.1956$

$\log \tan \frac{1}{2}C = 9.7469 - 10$

COMPROBACIÓN: $A + B + C = 180°02'$.

bro o *elemento* del conjunto. Generalmente los conjuntos se denotan por mayúsculas y sus elementos por minúsculas; la relación "a es un elemento de A" se simboliza mediante $a \in A$, en tanto que $a' \notin A$ significa que "a **no** es un elemento de A".

Existen 2 formas convenientes para describir conjuntos explícitamente.

En la primera, se hace una lista de los elementos del conjunto y se encierra entre llaves; es la **"forma desplegada".** Por ejemplo, el conjunto de las letras de la palabra *Mississippi* es $\{i, M, p, s\}$; note que cada elemento no aparece en lista más de una vez y que el orden es inmaterial.

Ejemplo 1: Sea $A = \{1, 2\}$ y $B = \{-1, 0, 1\}$. Establezca el conjunto C cuyos elementos son pares ordenados, con un elemento de A como primer miembro del par y un elemento de B como segundo.

Solución: $C = \{(1, -1),\ (1, 0),\ (1, 1),\ (2, -1),\ (2, 0),\ (2, 1)\}$.

En la segunda que generalmente es la más conveniente, especialmente cuando se trata de conjuntos que tienen muchos elementos, se da una regla que sirve para identificar o determinar los objetos que van a formar parte del conjunto; la regla es ahora lo que se encierra entre llaves. Esta forma se designa por el nombre de **"forma condensada".**

Por ejemplo, el conjunto de los múltiplos de 10 se representa por $\{x|x = 10\,n,\ n \text{ entero}\}$, que se lee: "el conjunto de elementos x tales que $x = 10\,n$, donde n es un entero". Como en este libro, x denota un número real, la primera x en la notación condensada anterior, implica que todos los elementos del conjunto van a ser números reales. La línea vertical significa **"tal que".**

En general, entonces, la descripción de un conjunto en esta forma condensada tiene la distribución siguiente:

$$\{*|\text{proposición}\},$$

en donde:

— las llaves establecen el hecho de que se trata de la descripción de un conjunto.
— el *asterisco* indica que en esa parte aparece un símbolo que manifiesta la naturaleza general de los elementos del conjunto.
— la "proposición" implica las condiciones que los elementos deben satisfacer para poder pertenecer al conjunto.

Un conjunto que no tiene elementos se llama "*conjunto nulo*" o "*conjunto vacío*" y se representa por $\varnothing$. El ejemplo 2 contiene algunos conjuntos descritos en ambas formas.

Ejemplo 2:

$$\{x|x^2 = x\} = \{0, 1\}.$$
$$\{x|x^2 - 3x = -2\} = \{1, 2\}.$$
$$\{x|x + 1 = 0\} = \{-1\}.$$
$$\{x|x^2 = 1 \text{ y } x + 2 = 0\} = \varnothing.$$
$$\{x|x > 0 \text{ y } x = 2n, n \text{ entero}\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

La definición 1.7-1 estableció la de una función en términos de conjuntos; de acuerdo con ella, el conjunto $A = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3)\}$ es una función, mientras que $B = \{(1, 1), (2, 3), (2, 4)\}$, no lo es, ya que los dos últimos pares ordenados tienen 2 como primer miembro del par y diferentes segundos miembros. El conjunto B recibe el nombre de *relación*. Note que el dominio de A es $\{1, 2, 3\}$ y que su recorrido es $\{1, 3\}$.

Existen diferentes modos de construir conjuntos a partir de conjuntos dados. Dados dos conjuntos A y B, se pueden construir otros nuevos llamados

— su *unión*, que se denota por $A \cup B$
— su *intersección*, que se denota por $A \cap B$
— el *complemento* de A, representado por A' y
— su *producto cartesiano*, que se representa por $A \times B$.

Definición A.4-1: $A \cup B = \{y | y \in A \text{ y/o } y \in B\}$. (y está en A, o en ambos). Este conjunto *contiene* a A y a B.

Definición A.4-2: $A \cap B = \{y | y \in A \text{ y } y \in B$. Este conjunto tiene como elementos solamente a aquellos que simultáneamente están en A y B.

Cuando los elementos de un conjunto proceden de uno mucho mayor, a éste se le designa con el nombre de **conjunto universal** y se le designa por U. Por ejemplo, el conjunto $\{1, 2,3\}$ tiene elementos del conjunto de los números naturales, el cual es, entonces, un conjunto universal.

Definición A.4-3: $A' = \{y | y \in U \text{ y } y \notin A\}$, donde todo elemento de A es un elemento de U.

Definición A.4-4: $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$.

Ejemplo 3:

$\{0, 1\} \cup \{0, 2\} = \{0, 1, 2\}$.
$\{0, 1\} \cup \{0, 1\} = \{0, 1\}$.
$\varnothing \cup \{0. 1\} = \{0, 1\}$.
$\{0, 1\} \cup \{2, 3\} = \{0, 1, 2, 3\}$.
$\{0, 1\} \cap \{0, 2\} = \{0\}$.
$\{0, 1\} \cap \{0, 1\} = \{0, 1\}$.
$\varnothing \cap \{0, 1\} = \varnothing$.
$\{0, 1\} \cap \{2, 3\} = \varnothing$.
Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $A = \{2, 5\}$ entonces $A' = \{1, 3, 4\}$.
$A = \{1, 3\}$, $B = \{5, 7\}$, $A \times B = \{(1, 5), (1, 7), (3, 5), (3, 7)\}$.

Con estas operaciones se puede, partir de una colección de conjuntos y formar uniones, intersecciones, complementos y productos cartesianos y tener una nueva colección, generalmente más grande. El proceso puede repetirse una y otra vez.

El álgebra básica de conjuntos, se trata en muchos textos, por ejemplo el de *Algebra and Trigonometry,* por Nathan O. Niles, John Wiley & Sons, Inc., 1965

EJERCICIOS A.4

1. Escriba los siguientes conjuntos en forma desplegada.

a) $\{(x, y)|y = x$, donde $x = -1, 0, 1, 2\}$.
b) $\{(x, y)|y = 3$, donde $x = 0, 1, 2, 3\}$.
c) $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 4$, donde $x = 0, 1, 2\}$.
d) $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 0$, donde $x = 1$ y y es real$\}$.

2. Dados A y B, forme el conjunto $C = A \times B$.

a) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{2, 3\}$. *b)* $A = \{2\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$.

3. Dados los mismos conjuntos del problema anterior, forme $D = B \times A$; diga si C y D son iguales. (Dos conjuntos son iguales si contienen exactamente los mismos elementos por ejemplo; $\{d, e, f\} = \{d, e, f\}$ y $\{d, e, f\} \neq \{d, e\}$.)

4. En un sistema coordenado rectangular, construya los elementos pertenecientes a los siguientes conjuntos; cada par ordenado representa las coordenadas de un punto.

a) $A = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$.
b) $B = \{(0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$.
c) $C = \{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$.
d) $D = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 5)\}$.

¿Cuáles de estos conjuntos son funciones?

5. Construya los elementos de los siguientes conjuntos para

$$x = -2, -1, 0, 1, 2.$$

a) $\{(x, y)|y = x\}$. *b)* $\{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\}$.
c) $\{(x, y)|y = 4x^2\}$. *d)* $\{(x, y)|y = |x|\}$.

6. Sombree las regiones del plano XY, indicadas por cada uno de los siguientes conjuntos.

a) $\{(x, y)|y < 3\}$. *b)* $\{(x, y)|x > -2\}$.
c) $\{(x, y)|x^2 + y^2 < 1\}$. *d)* $\{(x, y)|x^2 + y^2 > 1\}$.

7. Defina los 4 cuadrantes de un sistema coordenado rectangular, usando notación de conjuntos.

8. Forme la *unión* y la *intersección* de cada uno de los siguientes pares de conjuntos

a) $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c, d, e, f, 4, 5\}$.
b) $A = \{x|x$ es una consonante$\}$.
$B = \{x|x$ está en la palabra "numerario"$\}$.
c) $A = \{x|x$ es un entero par$\}$; $B = \{1, 2, 4\}$.

9. Dados U y A, halle A':

a) $U = \{a, b, c, d, 2, 3\}$, $A = \{c, 2\}$.
b) $U =$ {todas las palabras castellanas de tres letras}, $A =$ {todas las palabras de tres letras en este libro}.

10. Forme $A \times B$ si

a) $A = \{2, 0\}$, $B = \{1, 9, 13\}$. *b)* $A = \{a, e, i\}$, $B = \{o, u, 7\}$.

11. Sea X el conjunto de todos los números reales y Y también $(X = Y)$. Diga qué es $X \times Y$. ¿Cómo podría describir el plano cartesiano (que contiene los ejes X y Y), usando notación de conjuntos, si X y Y son conjuntos idénticos (el de los números reales)?

Respuestas

a los ejercicios

Respecto a los problemas que contienen incisos, se dan las respuestas de *a*), *c*), *e*), *g*), etc. De lo contrario, se dan las respuestas de los problemas de números impares. Para aquellos problemas que no comprenden logaritmos, se hicieron las operaciones con una regla de cálculo de 25 cm. Se han omitido a propósito las respuestas de algunos problemas.

CAPITULO 1

Ejercicios 1.2 Página 21

8. *a*) 7. *c*) -2. **9.** *a*) -8, 8. *c*) 2, 2. **10.** *a*) -4. *c*) 5.5. *e*) 5. **11.** *a*) 8,2. *c*) 2, -2. *e*) 2, -8. **13.** No. **14.** *a*) 4.

Ejercicios 1.3 Página 25

1. *a*) $(+,+)$. *c*) $(-,-)$. **3.** *a*) 3. **5.** *a*) $r = 5$, CI. *c*) $r = 10$, CII. *e*) $r = 5$, CIII. *g*) $r = \sqrt{5}$, CI. **6.** *a*) 25. *c*) -3. *e*) ± 7. **7.** *a*) $\sqrt{41}$. *c*) $\sqrt{17}$. *e*) $4\sqrt{5}$. **8.** *a*) -1 y 5. **9.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$. una circunferencia. **15.** -1 y 7.

Ejercicios 1.5 Página 30

1. *a*) π. *c*) $\pi/4$. *e*) 0.055. *g*) 0.0366. *i*) 1.96. *k*) 5.71. **2.** *a*) 180°. *c*) 30°, *e*) 1.6°. *g*) 1719°. *i*) 18.2°. *k*) 13.6°. **3.** 5 cm. **5.** 0.78 km. **7.** 7.85 rev. **9.** 59.7 cm^2. **11.** 0.0056 radianes. **13.** 1,310,000 m^2. **15.** $s = 12{,}160$ km. $A = 42.250{,}000$ km^2. **17.** 20.7 m, 77.2 rev.

Ejercicios 1.6 Página 33

1. I. **3.** múltiplo de $\pi/2$. **5.** III. **7.** IV. **9.** III. **11.** III. **13.** No. $A'(0,0)$, $B'(4,0)$, $C'(4,3)$.

Ejercicios 1.7 Página 35

1. 3, -2, -17. **3.** $-\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{3}$. **4.** *a*) x. *c*) z^2. *e*) $\theta + \varphi$. *g*) t. **5.** $r = \sqrt{A/\pi}$. **6.** *a*) Dominio: todos los números reales; recorrido: todos los números no negativos. *c*) Dominio: todos los números reales, excepto $x = \frac{1}{2}$; recorrido todos los números reales. *e*) Dominio: $|x| \geqq 4$; recorrido: todos los números no negativos. *g*) Dominio: $-1 \leqq x \leqq 3$; recorrido: $-4 \leqq f(x) \leqq 8$. **7.** $x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$. **9.** $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. **10.** *a*) Función. *c*) No es una función. *e*) Función. **14.** *a*) impar. *c*) Ni uno ni otro. **16.** *a*) Función. *c*) Función.

CAPITULO 2

Ejercicios 2.1 Página 40

3. 1, 1. **5.** No. Valor máximo de sen θ es 1. **7.** Recíprocos. Sí, cos θ y sec θ, tan θ y cot θ.

Ejercicios 2.2 Página 44

Las respuestas a problemas que necesitan de todas las funciones trigonométricas están listadas en el orden: sen θ, cos θ, tan θ, cot θ, sec θ y csc θ.

1. *a*) 0.50, 0.87, 0.58, 1.73, 1.16, 2.00. *c*) 0.87, −0.50, −1.73, −0.58, −2.00, 1.16, *e*) −0.42, 0.91, −0.47, −2.14, 1.10, −2.37, *g*) 0.64, −0.77, −0.84, −1.19, −1.30, 1.56. *i*) 0.59, 0.81, 0.73, 1.38, 124, 1.70. *k*) 0.80, −0.61, −1.31, −0.76, −1.65, 1.26. **2.** *a*) −0.50, 0.87, −0.58, −1.73, 1.16, −2.00. *c*) 0.87, −0.50, −1.73. −0.58, −2.00, 1.16. *e*) 0.64, 0.77, 0.84, 1.19, 1.30, 1.56. *g*) −0.17, −0.98, 0.18, 5.67, −1.02, −5.76. **3.** *a*) CI, CII. *c*) CI, CIII. *e*) CII, CIII.

5. *a*) $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$. *c*) $\frac{-5}{13}, \frac{-12}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}, \frac{-13}{12}, \frac{-13}{5}$. *e*) $\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{-5}{3}, \frac{-5}{4}$. *g*) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, -1, -1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$. *i*) $\frac{1}{5}\sqrt{5}, \frac{-2}{5}\sqrt{5}$. $-\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}\sqrt{5}, \sqrt{5}$.

6.

	a)	*c*)	*e*)	*g*)	*i*)	*k*)
Cuadrante	II	IV	III	II	IV	I
sen θ	+	−	−	+	−	+
cos θ	−	+	−	−	+	+
tan θ	−	−	+	−	−	+
cot θ	−	−	+	−	−	+
sec θ	−	+	−	−	+	+
csc θ	+	−	−	+	−	+

7. *a*) Negativo. *c*) Positivo.

Ejercicios 2.3 Página 46

1. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{3}$. **3.** $\frac{-4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-4}{3}, \frac{3}{-4}, \frac{5}{3}, \frac{5}{-4}$. **5.** $\frac{-15}{17}, \frac{8}{17}, \frac{-15}{8}, \frac{-8}{15}, \frac{17}{8}, \frac{-17}{15}$. **7.** $\frac{-7}{25}, \frac{-24}{25}, \frac{7}{24}, \frac{24}{7}, \frac{-25}{24}, \frac{-25}{7}$ **9.** $\frac{1}{5}\sqrt{21}, \frac{-2}{5}, \frac{-1}{2}\sqrt{21}, \frac{-2}{21}\sqrt{21}, -\frac{5}{2}, \frac{5}{21}\sqrt{21}$. **11.** $\frac{-40}{41}, \frac{9}{41}, \frac{-40}{9}, \frac{-9}{40}, \frac{41}{9}, \frac{-41}{40}$ **13.** $\pm\frac{5}{13}, \pm\frac{12}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}, \pm\frac{13}{12}, \pm\frac{13}{5}$. **15.** $\pm\frac{12}{13}, \frac{-5}{13}, \pm\frac{12}{5}, \pm\frac{5}{12}, \frac{-13}{5}, \pm\frac{13}{12}$. **17.** $\pm\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \pm\frac{5}{3}$. **19.** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, -1, -1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}$. **21.** $\pm\frac{1}{5}\sqrt{21}, \frac{-2}{5}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{21}, \pm\frac{2}{21}\sqrt{21}. \frac{-5}{2}, \pm\frac{5}{21}\sqrt{21}$, **23.** $\pm\frac{40}{41}, \pm\frac{9}{41}, \frac{40}{9}, \frac{9}{40}, \pm\frac{41}{9}, \pm$

$\frac{41}{40}$. **25.** 0.32, 0.95, 0.34, 2.96, 1.05, 3.13. **27.** −0.83, 0.56, −1.5, −0.67, 1.8 −1.2. **29.** 0.77, 0.64, 1.21, 0.83, 1.57, 1.30. **31.** 90°, 180°, 270°.

Ejercicios 2.5 Página 51

1. *a*) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, −1, −1, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$. *c*) $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$, −2. *e*) 0, 1, 0, no existe, 1, no existe. *g*) −1, 0, no existe, 0 no existe. −1. *i*) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, 1, 1, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$. *k*) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$, −2, $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. *m*) lo mismo que para *k*). **2.** *a*):

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	−1
cos θ	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
tan θ	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	No existe

4. *a*) $\sqrt{6}$. *c*) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. *e*) $(\sqrt{3}-3)/3$. *g*) 0.

Ejercicios 2.6 Página 56

1. *a*) 0.0500. *c*) 0.1987. *e*) 0.0523. *g*) 0.5000. **2.** *a*) 0.9988. *c*) 0.9801. *e*) 0.9986. *g*) 0.8660. **3.** *a*) 0.1103. *c*) 0.6383. *e*) 1.580. *g*) 1.842. *i*) 1.001. *k*) 1.796. **4.** *a*) 7°40′. *c*) 57°40′. *e*) 22°40′. **5.** *a*) 1.2305. *c*) 0.4305. *e*) 0.6923. **6.** *a*) 0.5378. *c*) 0.8780. *e*) 0.6432. *g*) 0.5731. *i*) 3.036. *k*) 0.7684. *m*) 0.1382. *o*) 1.024. **7.** *a*) 4°58′. *c*) 41°56′. *e*) 17°45′. *g*) 19°52′. *i*) 33°03′. *k*) 25°59′. **8.** *a*) 0.1350. *c*) 1.3123. *e*) 0.3937. *g*) 1.707. *i*) 0.3708. *k*) 0.8746. **9.** sen $\theta = \theta$. **11.** {7°30′, 82°30′, 7°26′, 82°34′}.

Ejercicios 2.7 Página 59

1. *a*) sen 65. *c*) −tan 34°32′. *e*) −sec 52°58′. *g*) sen 29°. **2.** *a*) 0.6691. *c*) −0.2065. *e*) −1.410. *g*) 0.7173. *i*) 0.1405. *k*) −0.3451. **3.** *a*) 341°. *c*) 127°49′. *e*) 331°35′. *g*) 38°44′, 141°16′. *i*) 36°52′, 216°52′. *k*) 139°23′, 220°37′. **5.** (vea la página siguiente). **7.** {26°34′ 30°, 60°, 63°26′}.

Ejercicios 2.8 Página 61

1. *a*) −0.5299. *c*) 2.050. *e*) −0.5192. *g*) −2.130. *i*) −0.9877. **3.** *a*) $\frac{3}{4}$. **5.** cos θ y sec θ son pares, las otras son impares.

CAPITULO 3

Ejercicios 3.2 Página 66

1. $B = 90° - A$, $a = c \operatorname{sen} A$, $b = c \cos A$. **3.** $\cos B = a/c$, $b = a \tan B$, $A = 90° - B$. **5.** $\operatorname{sen} B = b/c$, $a = b \tan A$, $A = 90° - B$. **7.** $D = 90° - F$,

5.

θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen θ	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos θ	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
tan θ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0
cot θ	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	No existe	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	No existe
sec θ	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	No existe	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	1
csc θ	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	No existe	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-2	No existe

$d = f \cot F$, $e = f \csc F$. **8.** *a*) $x = y \tan \theta$. **9.** *a*) $y = z \cos \theta$. **10.** *a*) $z = x \csc \theta$. **11.** *a*) $\tan \theta = x/y$. *c*) $\cos \theta = y/z$. **12.** *a*) $\cos \theta$. **13.** *a*) $\tan \beta$. **14.** *a*) $\cot x$.

Ejercicios 3.4 Página 74

1. *a*) $B = 58°$, $b = 3.2$, $c = 3.8$. *c*) $A = 37°$, $B = 53°$, $c = 5$. *e*) $A = 54°$, $B = 36°$, $c = 15.5$. *g*) $a = 1.24$, $c = 1.39$, $B = 27°20'$. i) $a = 1.13$, $b = 6.18$, $B = 79°40'$. *k*) $b = 104$, $A = 50°50'$, $B = 39°10'$. *m*) $a = 2855$, $b = 3{,}105$, $A = 42°34'$. *o*) $a = 1710$, $b = 185$, $A = 83°50'$. *q*) $c = 19.7$, $A = 48°20'$, $B = 41°40'$. *s*) $a = 3.02$, $A = 67°40'$, $B = 22°21'$. **2.** *a*) $a = 5.3$, $c = 13.5$, $C = 120°$. *c*) $a = 12.8$, $B = 24°20'$, $C = 123°40'$. *e*) $c = 14.5$, $B = 10°$, $C = 150°$. *g*) $a = 12$, $b = 30.7$, $B = 100°10'$. **4.** *a*) $A = 22°$, $B = 38°$, $C = 120°$.

Ejercicios 3.5 Página 80

1. 97°. **3.** 7010 m **5.** 10°. **7.** 141 m. **9.** 5.2 m; 30°. **11.** 1880 Kph. **13.** 2.6 Km. **15.** 356.4°, 45.8 Km. **17.** 337.6°. **19.** 197 m. **21.** 45°, 56.3°, 62°, 1068 m. **22.** *a*) 15.6, 9. *c*) −4, 6.9. *e*) −16.1, 19.1. *g*) 40.3, −40.3. **23.** *a*) 5.8, 59°. *c*) 13, 202.6°, **25.** 446 kg, N52°W. **27.** 532 Km.

CAPITULO 4

Ejercicios 4.2 Página 87

5. Sí. Infinitos. **6.** *a*) $y = \frac{3}{5}$. *c*) $x = -\frac{7}{25}$. *e*) $x = \frac{40}{41}$. *g*) $y = \frac{-17}{145}$.

Ejercicios 4.3 Página 90

1. $\tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u}$ $\cot u = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$ $\sec u = \frac{1}{\cos u}$ $\csc u = \frac{1}{\operatorname{sen} u}$. **3.** *a*) $\frac{5}{13}, \frac{12}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}, \frac{13}{12}, \frac{13}{5}$. *c*) $\frac{-24}{25}, \frac{-7}{25}, \frac{24}{7}, \frac{7}{24}, \frac{25}{-7}, \frac{25}{-24}$ *e*) $-\frac{5}{13}, \frac{-12}{13}, \frac{5}{12}, \frac{12}{5}, -\frac{13}{12}, \frac{-13}{5}$

g) $\frac{-21}{29}, \frac{20}{29}, \frac{-21}{20}, \frac{-20}{21}, \frac{29}{20}, \frac{-29}{21}$

5. *a*) 0, 1, 0, no existe, 1, no existe. *c*) 0, −1, 0, no existe, −1, no existe. *e*) Lo mismo que para *a*). *g*) Lo mismo que para *c*). *i*) 1, 0, no existe, 0, no existe, 1. *k*) Lo mismo que para *c*). *m*) Lo mismo que para *i*). *o*) Lo mismo que para *c*). **9.** No. sen u no puede ser mayor que uno. **11.** No. **13.** No.

Ejercicios 4.4 Página 93

1. *a*) 0.0200. *c*) 0.1003. *e*) 2.563. *g*) 0.9704. *i*) 0.2394. *k*) 2.095. **2.** *a*) 0.20. *c*) 1.57. *e*) 0.58. *g*) 0.826. *i*) 1.329. *k*) 1.471. **3.** *a*) 0.985. *c*) 0.998. *e*) 1.00. uno. **5.** *a*) 0.0995. *c*) 0.024. **6.** *a*) 2.08. *c*) Indeterminado. **7.** *a*) $s = 0.439$ m, $v = -1.19$ m/sec, $a = -10.98$ m/sec². *c*) $s = 0.04$ m, $v = -2.49$ m/sec, $a = -0.88$ m/sec². **8.** *a*) 0. *c*) 0.00006 m. *e*) 0.00108 m.

9. *a*) 1 cm. *c*) 0.79 cm. *e*) 0. **10.** Radianes. *a*) 0.041. *c*) 9. *e*) No. **11.** *a*) $x = 0$, $y = 0.0024$. *c*) $x = 0.009$, $y = 0.089$. *e*) $x = 0.36$, $y = 1$. **12.** *a*) $x = 1.005$, $y = 0.003$. *c*) $x = 1.077$, $y = 0.021$. *e*) $x = 1.312$, $y = 0.204$. **13.** *a*) 33.9. *c*) 110.

Ejercicios 4.5 Página 96

1. *a*) sen 1.34. *c*) tan 0.36. *e*) $-\sec 0.86$. *g*) $-\text{sen } 1.4$. **2.** *a*) 0.9168. *c*) 0.4713. *e*) -1.795. *g*) -0.9854. *i*) -0.8415. *k*) 5.798.

3.

u	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen u	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos u	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan u	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0

4. *a*) -4.71. *c*) 1.59. *e*) -8. **5.** *a*) $x = 0.046$, $y = 0.268$. *c*) $x = 3.3$, $y = 3.42$. *e*) $x = 9.27$, $y = 3.42$. *g*) $x = 12.42$, $y = 0.58$. **6.** *a*) 0.782. *c*) -0.707. **7.** No. $t = 6.6$.

CAPITULO 5

Ejercicios 5.2 Página 101

4. *a*) $\tan u$. *c*) $\cot^2 B$. *e*) $\cot A$. *g*) $\csc \theta$. *i*) $\csc u$. *k*) $\csc B$. *m*) $\tan u$. **6.** *a*) $\cos u = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 u}$, $\tan u = \pm\dfrac{\text{sen } u}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 u}}$, $\cot u = \dfrac{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 u}}{\text{sen } u}$, $\sec u = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 u}}$, $\csc u = \dfrac{1}{\text{sen } u}$, *c*) $\text{sen } u = \dfrac{\tan u}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 u}}$, $\cos u = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 + \tan^2 u}}$. $\cot u = \dfrac{1}{\tan u}$, $\sec u = \pm\sqrt{1 + \tan^2 u}$, $\csc u = \dfrac{\pm\sqrt{1 + \tan^2 u}}{\tan u}$, **7.** *c*) 9.43. **9.** *a*) $3125 \cos^5 u$. *c*) $\csc u$. *e*) $\dfrac{81}{64}\tan^3 u \sec u$.

Ejercicios 5.4 Página 108

1. $x^2 + y^2 = 9$. **3.** $4y^2 - x^2 = 16$. **5.** $2x^2 + y = 1$. **7.** $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$. **9.** $x^2 - y^2 = 1$. **11.** $x^2 + y^2 = 4y$. **13.** $y(x^2 + 4) = 8$. **15.** $x^{2/3}y^{2/3}(x^{2/3} + y^{2/3}) = 1$. **17.** $m v_0^2 x^2 + a^2 k y^2 = a^2 m v_0^2$.

CAPITULO 6

Ejercicios 6.2 Página 116

1. 1, 2π. **3.** 3, 2π. **5.** 2, 6π. **7.** 3, $\frac{3}{4}$. **9.** 2, π. **11.** 3, 2. **13.** $\frac{2}{3}$, 8π. **15.** 4, 3π. **17.** 2, 6.

Ejercicios 6.4 Página 121

1. 1, 2π. **3.** $\frac{1}{3}$, 2π. **5.** 3, π. **7.** 1, 4. **9.** 3, 2π, $\frac{\pi}{3}$ a la izquierda.

11. 3, $\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$ a la derecha. **13.** 2, 2π, π a la izquierda. **15.** $\frac{1}{2}$, 4π, $\frac{2}{3}$ π a la derecha.

Ejercicios 6.6 Página 125

5. π. **7.** π. **9.** 2π. **11.** $\frac{\pi}{2}$. **13.** 2π. **15.** 1.

CAPITULO 7

Ejercicios 7.2 Página 131

2. *a*) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$. *c*) 0. *e*) $-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$. *g*) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

i) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$. **3.** *a*), *b*) y *c*). **5.** *a*) $\frac{33}{65}, \frac{63}{65}$. *c*) $-\frac{13}{85}, \frac{77}{85}$

7. *a*) $\cos 7A$. *c*) $\cos x$. **9.** *a*) $\frac{4}{5}$.

Ejercicios 7.3 Página 135

3. *a*) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, $2-\sqrt{3}$. *c*) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$, $-2-\sqrt{3}$.

e) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$, $\sqrt{3}-2$. *g*) $-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$, $2+\sqrt{3}$.

i) $\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$, $\sqrt{3}-2$. **7.** *a*) $-\frac{56}{65}$. *c*) $-\frac{56}{33}$. **8.** *a*) $-\frac{3}{5}$. *c*) $\frac{3}{4}$.

9. *a*) $-\frac{304}{425}$. *c*) $-\frac{304}{297}$. **11.** $A = \frac{\pi}{2} \pm n\pi$, $B = \pm n\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

13. *a*) $\operatorname{sen} 7A$. *c*) $\operatorname{sen} x$. *e*) $\tan 8A$. *g*) $\tan A$.

15. $\dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan A \tan C - \tan B \tan C}$ **16.** *a*) $5 \operatorname{sen}(x + \alpha)$, donde $\tan \alpha = \frac{4}{3}$. *c*) $2 \operatorname{sen}(2x + \alpha)$ donde $\tan \alpha = \sqrt{3}$.

Ejercicios 7.4 Página 138

1. *a*) $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$. *c*) $\frac{240}{289}, \frac{-161}{289}, \frac{-240}{161}$ **2.** *a*) $\operatorname{sen} 10x$. *c*) $\tan t$.

e) $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 12A$. *g*) $\frac{1}{2} \tan 6t$. *i*) $\cos 2A$. **6.** *a*) $3 \operatorname{sen} A - 4 \operatorname{sen}^3 A$.

c) $\dfrac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

Ejercicios 7.5 Página 139

1. (*a*) $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. (*c*) $2 - \sqrt{3}$. (*e*) $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. (*g*) $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. (*i*) $2 + \sqrt{3}$. (*k*) $-\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. **2.** (*a*) $\frac{1}{10}\sqrt{2}, \frac{7}{10}\sqrt{2}, \frac{1}{7}$. (*c*) $\frac{3}{13}\sqrt{13}, \frac{2}{13}\sqrt{13}, \frac{3}{2}$. **3.** (*a*) $\cos 3\alpha$. (*c*) $\tan 2\alpha$. (*e*) $3 \operatorname{sen} 4y$. **5.** (*a*) $0° \leqq A \leqq 360°$. (*c*) $0° \leqq A \leqq 180°$ y $540° \leqq A < 720°$. (*e*) $0° \leqq A < 180°$ y $360° \leqq A < 540°$. **8.** (*a*) $\frac{1}{4}\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$. (*c*) $\frac{1}{4}\sqrt{8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}}}$. (*e*) $\frac{1}{4}\sqrt{8 + \sqrt{(2 + \sqrt{3})(8 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}})} + \sqrt{(2 - \sqrt{3})(8 - 2\sqrt{8 + 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}})}}$.

CAPITULO 8

Ejercicios 8.2 Página 152

1. *a*) Lo mismo. *c*) Lo mismo. **2.** *a*) 2.5092. *c*) 8.6253 − 10. *e*) 9.9219 − 10. *g*) 9.4943 − 10. *i*) 10.7072 − 10. *k*) 9.3724 − 10. *m*) 9.9266 − 10. *o*) 10.0059 − 10. **3.** *a*) $M = 53.6$. *c*) $M = 9.554 \times 10^8$. *e*) $N = 1.166$. *g*) $A = 17°30'$. *i*) $\theta = 74°22'$. *k*) $A = 82°21$. *m*) $A = 56°49.'$ *o*) $\alpha = 24°48'$.

Ejercicios 8.3 Página 154

1. *a*) 96.2. *c*) 0.06814. *e*) 0.6631. *g*) 673.7. *i*) 0.02048. **2.** *a*) 86,518. *c*) 0.96696. *e*) 1938.1.

Ejercicios 8.4 Página 156

1. *a*) $b = 81.13$, $c = 106.7$, $B = 49°30'$. *c*) $b = 9.694$, $c = 1013$, $A = 16°53'$. *e*) $c = 10.03$, $A = 64°22'$, $B = 25°38'$. *g*) $a = 73.93$, $b = 39.05$, $B = 27°51'$. *i*) $b = 17.06$, $A = 14°39'$ $B = 75°21'$, *k*) $b = 118.1$, $A = 10°12'$, $B = 79°48'$. *m*) $a = 284.4$, $b = 315.9$, $B = 48°$. *o*) $c = 1084$, $A = 53°20'$, $B = 36°40'$. **2.** *a*) $c = 662.20$, $A = 51°13.2'$, $B = 38°46.8'$. *c*) $a = 465.58$, $c = 465.64$, $B = 1°0.8'$. *e*) $a = 201.39$, $b = 222.36$, $B = 47°50.0'$.

Ejercicios 8.5 Página 158

1. *a*) 0.6931. *c*) 2.4849. *e*) −1.2801. *g*) 3.2426. **2.** *a*) 3. *c*) 2.15 *e*) 17.63. *g*) −0.707. **4.** *a*) 3.17. *c*) 4.41. *e*) −0.0811. **5.** *a*) 0.729. *c*) 2.16.

CAPITULO 9

Ejercicios 9.2 Página 163

1. *a*) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$. *c*) 6. *e*) 45°, 135°.

Ejercicios 9.3 Página 170

1. *a*) $b = 3.16$, $c = 3.92$, $C = 62°10'$. *c*) $a = 0.4078$, $c = 0.1956$, $C = 18°28'$. *e*) $a = 11.813$, $b = 4.5917$, $C = 88°35.5'$. **2.** *a*) Ninguno. *c*) Dos. *e*) Uno. **3.** *a*) $c_1 = 10.46$, $B_1 = 39°40'$, $C_1 = 119°40'$, $c_2 = 3.917$, $B_2 = 140°20'$, $C_2 = 19°00'$. *c*) No tiene solución. *e*) $b = 3314.8$, $A = 34°23.8'$, $B = 21°24.0'$. **4.** *a*) 2.001×10^6. **5.** 935.2 m. **7.** 1531 m. **9.** 23.5 Kph.

Ejercicios 9.4 Página 173

1. $\sqrt{13}$. **3.** $\sqrt{74}$. **5.** $S = \frac{1}{2}b\,c \operatorname{sen} A$.

Ejercicios 9.5 Página 179

1. *a*) $a = 43.49$, $B = 61°41'$, $C = 57°09'$. *c*) $c = 177.2$, A $= 111°25'$, $B = 42°45'$. *e*) $c = 166.21$, $A = 99°27.2'$, $B = 49°52.2'$. **2.** *a*) $c = 43.56$, $A = 113°57'$, $B = 50°52'$, *c*) $b = 27.98$, $A = 43°05'$ $C = 69°35'$. *e*) $c = 1640$, $A = 131°39'$, $B = 14°12'$. **3.** *a*) $A = 63°51'$, $B = 42°55'$, $C = 73°15'$. *c*) $A = 26°25'$, $B = 140°51'$, $C = 12°44'$. *e*) No tiene solución. (No es un triángulo). **5.** 122°. **7.** 26.9 Km. **9.** 272.7°, 45.37 Km. **11.** $BD =$ 16.3 Km, $CD = 7.5$ Km.

CAPITULO 10

Ejercicios 10.2 Página 185

2. *a*) 1/2. *c*) No está definido. *e*) No está definido. **3.** Si y denota la función dada *a*) $x = \operatorname{Sen} y$. *c*) $x = \operatorname{Sen}\left(\frac{y}{2}\right)$. *e*) $u - v = \operatorname{Tan} y$. *g*) $1 + x^2 = \operatorname{Sen}^2 y$. *i*) $x + 1 = 3 \operatorname{Tan} y$. **4.** *a*) $\pi/3$. *c*) π. *e*) 0. *g*) $\pi/4$. *i*) $-\pi/6$. *k*) $\pi/2$. **5.** *a*) 0.72. *c*) 2.12. *e*) −1.171. **6.** *a*) $\sqrt{7}/4$. *c*) 24/25. *e*) 21/29. *g*) −15/8. *i*) −5/12. *k*) 8/17. **7.** *a*) π. *c*) $-\pi/2$. *e*) No está definido. **8.** *a*) $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$. *c*) $0 \leqq x \leqq \pi$. *e*) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. **9.** *a*) 3/5. *c*) 2.18. **10.** *a*) 2.517. *c*) 130°11′.

Ejercicios 10.3 Página 188

1. *a*) x^2. *c*) $\sqrt{1 - y^2}/y$. *e*) $2u\sqrt{1 - u^2}$. *g*) $2v/(1 + v^2)$. *i*) −13/85. *k*) −323/325. *l*) 36/77. *m*) −36/325. **4.** *a*) Impar.

CAPITULO 11

Ejercicios 11.2 Página 193

1. 30°, 150. **3**. 0, π, $7\pi/6$, $11\pi/6$. **5**. 0°, 180°. **7**. $\pi/4$, $5\pi/4$. **9**. 30°, 90°, 150°, 270°. **11**. $\pi/2$, $7\pi/6$, $11\pi/6$. **13**. 18°30′, 135°, 198°30′, 315°. **15**. 0, $2\pi/3$, $4\pi/3$. **17**. 30°, 150°, 180°, 210°, 330°. **19**. 3.48, 3.55, 5.87, 5.94. **21**. 22°30′, 112°30′ 202°30′, 292°30′. **23**. No tiene solución. **25**. 45°, 135°, 225°, 315°. **27**. 0.46, 0.78, 2.36, 2.68, 3.60, 3.92, 5.50, 5.82. **29**. No tiene solución.

Ejercicios 11.3 Página 195

1. 0°, 180°. **3**. $\pi/2$, $3\pi/2$. **5**. 30°, 90°, 150°, 270°. **7**. $\pi/2$, $7\pi/6$, $11\pi/6$. **9**. 227°, 313°. **11**. $\pi/2$, π, $3\pi/2$. **13**. 30°, 150°. **15**. $\pi/4$, $3\pi/4$, $5\pi/4$, $7/\pi 4$. **17**. 90°, 180°, 270°. **19**. $\pi/2$. **21**. 30°, 150°, 210°, 330°. **23**. π, $3\pi/2$. **25**. 0°, 180°. **27**. $2\pi/3$, π. **29**. 135°.

Ejercicios 11.4 Página 197

1. 90°, 330°. **3**. 180°, 300°. **5**. 30°, 134°50′. **7**. 53°10′. **9**. 68°30′, 341°30′. **11**. 254°30′, 347°30′. **13**. 35°50′, 254°50′. **15**. $5\pi/12$, $13\pi/12$. **17**. $5\pi/6$, $3\pi/2$. **19**. 0.72, 3.14. **21**. No, sen $(\theta + \alpha) \not> 1$.

CAPITULO 12

Ejercicios 12.1 Página 205

1. *a*) $\left[\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right]$. *c*) $[0, -3]$. *e*) $[\sqrt{3}, -1]$. **2**. *a*) $[5, 0°]$. *c*) $[17, 298°10']$. *e*) $[\sqrt{5}, 296°30']$. *g*) $[49.6, 328°]$. *i*) $[13, 104°30']$. **4**. *a*) $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$. *c*) $\left[-\frac{15}{17}, -\frac{8}{17}\right]$. **5**. *a*) $[0, 8]$. *c*) $[-5, -8]$. *e*) $[7, -4.3]$. *g*) $[20, -33.6]$.

8. *a*) 4. *c*) -3. *e*) $-2\sqrt{2}$. *g*) 0. **10**. *a*) -19. *c*) $-3\sqrt{3}$. *e*) $4\sqrt{2}$. *g*) -6. **12**. *a*) 30°. *c*) 41°45′. **13**. 203.6°, 292 Kph. **14**. *a*) [87.2, 293.4°]. *c*) [19.1 lb, 345.5°]. **17**. *a*) 11. *c*) 37.5. **20**. *a*) $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. *c*) $(-0.695, 3.94)$. *e*) $(3, 2)$. *g*) $(-4, 3)$.

Ejercicios 12.2 Página 210

2. *a*) $4 + 7i$. *c*) $3 + 8i$. *e*) $-1 + 3i$. *g*) $5 - 5i$. *i*) $(-9 + \sqrt{14}) + (3\sqrt{7} + 3\sqrt{2})i$. *k*) $-\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$. *m*) $-\frac{5}{4} - \frac{3}{4}i$. **3**. *a*) $x = 3$, $y = -16$. *c*) $x = -\frac{5}{2}$, $y = -3$. **8**. *a*) $1 + 4i$. *c*) $7i$.

Ejercicios 12.3 Página 214

1. *a*) $2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$. *c*) $\sqrt{5}(\cos 333°30' + i \operatorname{sen} 333°30')$. *e*) $3(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$. *g*) $2(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$. *i*) $7\sqrt{2}(\cos 225° +$

i sen 225°). *k*) $15(\cos 160° + i \operatorname{sen} 160°)$. *m*) $21.7(\cos 62°35' + i \operatorname{sen} 62°35')$. *o*) $2.85(\cos 144°35' + i \operatorname{sen} 144°35')$. **2**. *a*) $\frac{7}{2}\sqrt{3} + \frac{7}{2}i$. *c*) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. *e*) $3i$. *g*) $-3i$. *i*) $8.78 + 9.57i$. *k*) $8.78 - 9.57i$. *m*) $-4.7 - 1.71i$. *o*) $-28.4 + 48.2i$. **3**. *a*) $8.32 + 9.43i$. **5** *a*) Igual. **6**. *a*) No. $\frac{3}{2}\sqrt{6}(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$. *c*) Sí. **7**. *a*) [6, 0°]. *c*) [6, 180°]. Se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos.

Ejercicios 12.4 Página 216

1. *a*) 12 cis 50°. *c*) 16 cis 45°. *e*) 4 cis 60°. *g*) 9 cis 90°. *i*) 4 cis 120°. *k*) 2 cis 120°. **2**. *a*) 65 cis 104°10′. *c*) $10\sqrt{2}$ cis 261°50′. *e*) 13 cis 292°35′. *g*) 125 cis 290°24′. *i*) cis 195°36′. *k*) 1.61 cis 97°10′. **3**. $\cos 2\theta \equiv \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen} 2\theta \equiv 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$.

Ejercicios 12.5 Página 219

1. *a*) 3 cis 20°, 3 cis 140°, 3 cis 260°. *c*) 4 cis 40°, 4 cis 160°, 4 cis 280°. *e*) 3 cis 100°, 3 cis 220°, 3 cis 340°. **2**. *a*) $3i$, $\pm\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$. *c*) $-3 + 2i$, $3 - 2i$. *e*) $4.77 + 1.52i$, $-3.7 + 3.36i$, -1.065, -4.87i. *g*) 5 cis 73.1°, 5 cis 193.1°, 5 cis 313.1°. *i*) ± 1, $\pm i$. **3**. *a*) -1, $0.81 \pm 0.59i$, $-0.31 \pm 0.95i$. *c*) $\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$, $-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$.

APENDICE

Ejercicios A.1 Página 222

2. *a*) 177.78 mílits. *c*) 2133.36 mílits. *e*) 1528 mílits. *g*) 10.2 mílits. **3**. *a*) 0.562°. *c*) 5°37.5′. *e*) 112°30′. **4**. *a*) 0.231 radianes. *c*) 0.785 radianes. **5**. 10 m. **7**. 6662 m. **9**. 1170 m.

Ejercicios A.4 Página 229

1. *a*) $\{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$. *c*) $\{(0, 2), (0, -2), (1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}), (2\ 0)\}$. **2**. *a*) $C = \{(-1, 2), (-1, 3), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3)\}$. **3**. *a*) $D = \{(2, -1), (2, 0), (2, 1), (3, -1), (3, 0), (3, 1)\}$. No. **4**. *a*) Función. *c*) Función. **7**. CI $= \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$. CII $= \{(x, y) | x < 0, y > 0\}$. CIII $= \{(x, y) | x < 0, y < 0\}$. CIV $= \{(x, y) | x > 0, y < 0\}$. **8**. *a*) $A \cup B = \{1, 2, 3, a, b, c, d, e, f, 4, 5\}$. $A \cap B = \varnothing$. *c*) $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$. $A \cap B = \{2, 4\}$. **9**. *a*) $A' = \{a, b, d, 3\}$. **10**. *a*) $\{(2, 1), (2, 9), (2, 13), (0, 1), (0, 9), (0; 13)\}$. **11**. $\{(x, y) | x$ y y son números reales$\}$.

INDICE

Abscisa, 23
Adición de números complejos, 210
  de ordenadas, 120
  de vectores, 202
  fórmulas de, 130, 133
Amplitud, de un número complejo, 212
  de una función senoidal, 113
Ángulo, definición de, 26
  de fase, 117
  de situación, 76
  dirigido, 27, 91
  en posición normal, 32
  medida de un, 26
    en grados, 27
    en radianes, 28
    en mílits, 222
  negativo, 27, 60
  positivo, 27
  reducido, 57
Ángulos, complementarios, 66
  coterminales, 27
  múltiplos de $\frac{\pi}{2}$, 32, 51
Arco, coterminal, 86
  de circunferencia unitaria, 85
  longitud de un, 29
  reducido, 95
Área, de un sector circular, 31
  de un triángulo, 164, 207
Argumento, de un número complejo, 212
  de una función, 34
Argumentos compuestos, funciones trigonométricas de, 128
Asíntotas, 124
Azimuth, 76

Biunívoca, correspondencia, 21

Característica, 149
Ciclo, 122
Científica, notación, 69
Cifras significativas, 69
Círculo trigonométrico, 84
Cociente, de dos números complejos, 216
Cologaritmo, 149
Composición de ordenadas, 120
Conjugados, números complejos, 209
Conjuntos
  complemento de un, 228
  elemento de un, 227
  igualdad de, 229
  intersección de, 228
  producto cartesiano, 228
  unión de, 228
Constante, 34
Coordenadas, 21, 23
  de un punto, 21
  sistema de, 22
Correspondencia biunívoca, 21
Cosecante, definición de, 39, 90
  gráfica de, 123
Coseno, definición de, 39, 90
  del argumento doble, 137
  del semiargumento, 139
  fórmulas de adición del, 130
  gráfica del, 118
  serie infinita del, 56
  variación del, 112
Cotangente, definición de, 39, 90
  gráfica de la, 123
Cuadrante, 22

Decreciente, función, 124
De Moivre, teorema de, 215
Diferencia tabular, 54
Distancia dirigida, 21
  entre dos puntos, 24
División de números complejos, 215
  entre cero, 40

Dominio de una función, 33
restringido, 34, 182

e 62, 84
Ecuaciones condicionales, 100
exponenciales, 157
logarítmicas, 158
paramétricas, 105
trigonométricas, 192
Eje, real, 209
imaginario, 209
Ejes, 22

Factorial, 53
Fase, ángulo de, 117
Forma polar de números complejos, 212
de vectores, 200
Fórmulas, de adición, 130, 133
de argumentos dobles, 137
de semiargumentos, 139
de transformación en producto, 144
sumario de, 144
Función, argumento de una, 34
creciente, 124
definición de, 33
dominio de una, 33
restringido de una, 31, 183
impar, 35
inversa, 182
par, 35
período de una, 113
recorrido de una, 33
trigonométrica, definición de una, 39, 90

Gráficas de funciones trigonométricas, 113, 123
de funciones trigonométricas inversas, 189

i, 82
Identidades, 100
verificación de, 103
Imagen, 33
Infinito, 122
Interpolación, 54, 151

Lado terminal, 27, 201
inicial, 27
Ley de los cosenos, 172
de los senos, 162
de las tangentes, 223
Línea de mira, 74
Logaritmos
cambios de base, 157
característica de los, 148
comunes, 147
definición de, 147
de Briggs, 147
de funciones trigonométricas, 151
en la resolución de triángulos, 68, 72, 88, 155, 164, 174, 226
mantisa de, 148
neperianos, 147
naturales, 147, 157
reglas de operación, 147

Mantisa, 149
Medición de ángulos, 26
Mílit, 222
Módulo de un número complejo, 213
Mollweide, fórmula de, 164
Mutiplicación de números complejos, 214
de vectores, 204

Notación científica, 69
común, 69
Nodo, definición de, 180
Nulo, conjunto, 227
Número, complejo, 208
real, 21

Ordenada, 23
Origen, 21, 23

Par ordenado, 23
Parámetro, 106
Período, 113
Posición, normal de un ángulo, 33
vector de, 25, 209
Potencia, de una función trigonométrica, 101
Producto,
de números complejos, 215
de vectores, 204
fórmulas de transformación en, 141, 144
Proyección, 201

Radián, 27
Radio vector, 25
Raíces de números complejos, 217
Recíprocos, números, 100
identidades de, 100
Recorrido de una función, 33

Rectangulares, coordenadas, 22
Reducido, ángulo, 57
Resolución de triángulos,
  oblicuángulos
    con logaritmos, 164, 166, 175, 176, 225, 226
    con regla de cálculo, 165, 167, 176, 177
  rectángulos
    aritmética, 70
    con logaritmos, 69
    con regla de cálculo, 72

Secante, definición de, 39, 90
  gráfica de, 123
Seno, definición de, 39, 90
  de argumentos dobles, 137
  del semiargumento, 139
  gráfica del, 113
  ley de los, 162
  serie infinita del, 52
  variación del, 121
Signos algebraicos de las funciones trigonométricas, 42
Sistema coordenado, 22
Solución de triángulos
  oblicuángulos, 161-180
  rectángulos, 63-82
Sustracción de números complejos, 210
  de vectores, 202

Tablas,
  logarítmicas, uso de, 150
  trigonométricas, uso de, 53
Tangente, definición de, 39, 90
  del argumento doble, 137
  del semiargumento, 138
  fórmulas de adición de, 134
  gráfica de la, 123
  variación de la, 122
Tangentes, de semiángulos, 225
  ley de los, 73
Triángulos
  área de, 164, 207
  oblicuángulos, 161-180
  rectángulos, 63-82
Trigonométricas, ecuaciones, 192

Unión de conjuntos, 228
Universal, conjunto, 228

Valor absoluto, de un número complejo, 213
  de una función, 34
  principal, 183
Variable, definición de, 34
Variación, del coseno, 112
  del seno, 112
  de la tangente, 122
Vector, componentes de un, 201
  definición, 79, 200
  forma polar de un, 200
  magnitud, 200
  notación matricial, 202
Vectores, álgebra de, 203
  ángulo entre dos, 205
  representación gráfica, 206
Vértice, 27

Obra de extraordinario valor didáctico que presenta un desarrollo lógico de la trigonometría. El autor examina la interpretación analítica y deduce en forma simple las fórmulas clásicas de la trigonometría plana. Correlaciona el plano cartesiano con los modelos geométricos regulares, a fin de familiarizar al alumno con el estudio posterior de la geometría analítica.

Se caracteríza por su lenguaje directo, preciso y moderno y también por la presentación sistemática de sus temas. Es una obra muy completa que se destaca por la gran variedad de problemas resueltos, de repaso y la interpretación vectorial con números complejos. Se complementa con ecuaciones logarítmicas y exponenciales y una excelente introducción a los conjuntos.

Debido a sus cualidades, constituye un magnífico libro de texto para el curso de trigonometría que se imparte en la enseñanza media, tanto en escuelas secundarias, preparatorias como en el bachillerato. También es muy apropiado para escuelas vocacionales y técnicas y como repaso para el primer curso de matemáticas a nivel profesional.

ISBN 968 – 18 – 0157 – 1

AREA: MATEMATICAS/Geometría